ДЕПАРТАМЕНТ ОБРАЗОВАНИЯ ГОРОДА МОСКВЫ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ ГОРОДА МОСКВЫ
«МОСКОВСКИЙ ГОРОДСКОЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ГАОУ ВО МГПУ)

Институт математики, информатики и естественных наук

«УТВЕРЖДАЮ»

Первый проректор

_______________ **Е.Н. Геворкян**

«___» ______________2016 г.

ПРОГРАММА КАНДИДАТСКОГО ЭКЗАМЕНА ПО СПЕЦИАЛЬНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ

«МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА, АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ»

Москва, 2016

Введение

В основу настоящей программы положены следующие дисциплины: математическая логика; алгебра; теория чисел.

Программа разработана экспертным советом Высшей аттестационной комиссии Министерства образования Российской Федерации по математике и механике при участии Математического института им. В.А. Стеклова РАН и Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.

Часть 1.

Математическая логика и теория алгоритмов

1. Понятие алгоритма и его уточнения. Вычислимость по Тьюрингу, частично рекурсивные функции, рекурсивно перечислимые и рекурсивные множества. Тезис Чёрча.

2. Универсальные вычислимые функции. Существование перечислимого неразрешимого множества. Алгоритмические проблемы.

3. Построение полугруппы с неразрешимой проблемой распознавания равенства.

4. Классы P и NP. Полиномиальная сводимость и NP-полные задачи. Теорема об NP-полноте задачи ВЫПОЛНИМОСТЬ.

5. Логика высказываний. Представимость булевых функций формулами логики высказываний. Конъюнктивные и дизъюнктивные нормальные формы.

6. Исчисление высказываний. Полнота и непротиворечивость.

7. Логика предикатов. Приведение формул логики предикатов к предварённой нормальной форме.

8. Исчисление предикатов. Непротиворечивость. Теорема о дедукции.

9. Полнота исчисления предикатов. Теорема Мальцева о компактности.

10. Элементарные теории классов алгебраических систем. Категоричные в данной мощности теории. Теорема о полноте теории, не имеющей конечных моделей и категоричной в бесконечной мощности.

11. Разрешимые теории. Теория плотного линейного порядка.

12. Формальная арифметика. Теорема о представимости вычислимых функций в формальной арифметике (без доказательства).

13. Теорема Гёделя о неполноте формальной арифметики. Теорема Тарского о невыразимости арифметической истинности в арифметике.

14. Неразрешимость алгоритмической проблемы выводимости для арифметики и логики предикатов.

15. Аксиоматическая теория множеств. Порядковые числа, принцип трансфинитной индукции. Аксиома выбора.

Алгебра

1. Теоремы Силова.

2. Простота группы $A_n, n > 4$ и SO_3.

3. Теорема о конечно порожденных модулях над евклидовым кольцом и ее следствия для групп и линейных операторов.

4. Свободные группы и определяющие соотношения.

5. Алгебраические расширения полей. Теорема о примитивном элементе. Поле разложения многочлена. Основная теорема теории Галуа.

6. Конечные поля, их подполя и автоморфизмы.

7. Радикал кольца. Структурная теорема о полупростых кольцах с условием минимальности.

8. Группа Брауэра. Теорема Фробениуса.

9. Нётеровы кольца и модули. Теорема Гильберта о базисе.

10. Алгебры Ли. Простые и разрешимые алгебры. Теорема Ли о разрешимых алгебрах. Теорема Биркгофа-Витта.

11. Основы теории представлений. Теорема Машке. Одномерные представления. Соотношения ортогональности.

12. Алгебраические системы. Свободные алгебры. Многообразие алгебр. Теорема Биркгофа.

13. Решетки. Дедекиндовы решетки. Теорема Стоуна о булевых алгебрах.

Теория чисел

1. Квадратичный закон взаимности.

2. Первообразные корни и индексы.

3. Неравенства Чебышева для функции f(x).

4. Дзета-функция Римана. Асимптотический закон распределения простых чисел.

5. Характеры и L-функции. Теорема Дирихле о простых числах в арифметической прогрессии.

6. Тригонометрические суммы. Модуль гауссовой суммы. Полные тригонометрические суммы и число решений сравнений.

7. Критерий Вейля равномерного распределения. Теорема Вейля о последовательности значений многочлена.

8. Модулярная группа и модулярные функции. Теорема о строении алгебры модулярных форм. Представление целых чисел унимодулярными квадратичными формами.

9. Приближение вещественных чисел рациональными дробями. Теорема Лиувилля о приближении алгебраических чисел рациональными дробями. Примеры трансцендентных чисел. Трансцендентность чисел e и π.

Рекомендуемая литература

1. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.

2. Ершов Ю.Л., Палютин Е.А. Математическая логика. 2-е изд. М.: Наука, 1987.

3. Мальцев А.И. Алгоритмы и рекурсивные функции. 2-е изд. М.: Наука, 1986.

4. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. 3-е изд. М.: Наука, 1984.

5. Новиков П.С. Элементы математической логики. 2-е изд. М.: Наука, 1973.

6. Ершов Ю.Л. Проблемы разрешимости и конструктивные модели. М.: Наука, 1980.

7. Ван дер Варден Б.Л. Алгебра. М.: Наука, 1976.
8. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Ч. 3. Основные структуры алгебры. М.: Физматлит, 2000.
9. Винберг Э.Б. М. Курс алгебры. М.: Факториал Пресс, 2001.
10. Скорняков Л.А. Элементы общей алгебры. М.: Наука, 1983.
11. Мальцев А.И. Алгебраические системы. М.: Наука, 1970.
12. Ленг С. Алгебра. М.: Мир, 1968.
13. Джекобсон Н. Алгебры Ли. М.: Мир, 1964.
14. Боревич З.И., Шафаревич И.Р. Теория чисел. М.: Наука, 1985.
15. Виноградов И.М. Основы теории чисел. М.: Наука, 1981.
16. Галочкин А.И., Нестеренко Ю.В., Шидловский А.Б. Введение в теорию чисел. М.: Изд-во МГУ, 1995.
17. Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел. М.: Наука, 1983.
18. Кейперс Л., Нидеррейтер Г. Равномерное распределение последовательностей. М.: Наука, 1985.
19. Коробков Н.М. Тригонометрические суммы и их приложения. М.: Наука, 1989.
20. Серр Ж.П. Курс арифметики. М.: Мир, 1972.
21. Чандрасекхаран К. Введение в аналитическую теорию чисел. М.: Мир, 1974.

Часть 2.

Абелевы группы и модули

1. Критерий Куликова и теоремы Прюфера.
2. Прямые пределы и обратные пределы модулей. Полнота и пополнение.
3. Делимые группы. Строение делимых групп. Конечно копорожденные группы.
4. p-базисные подгруппы и последовательности Ульма.
5. Алгебраическая компактность. Полные группы. Строение алгебраически компактных групп.
6. Группы расширений. Точные последовательности для функтора Ext.
7. Группы без кручения ранга 1. Вполне разложимые группы. Сепарабельные группы.
8. Квазипрямые разложения. Теорема Йонссона.
9. Вопрос по теме исследования.

Тождества алгебраических структур

1. Алгебраические структуры (универсальные алгебры).
2. Свободные алгебры, многообразия универсальных алгебр.
3. Решетки. Дедекиндовы решетки, теорема о композиционных рядах.
4. Диаграммы Юнга, представления симметрической группы Sn.
5. Тождества в линейных алгебрах. Полиоднородные и полилинейные тождества, действие групп S_n и $GL(n,k)$.
6. Алгебры с полиномиальными тождествами, структурные теоремы. Тождества матричных алгебр.
7. Проблема конечности базиса тождеств, шпехтовы (наследственно конечно базируемые) и нешпехтовы многообразия алгебр и групп.
8. Теорема Голода-Шафаревича.
9. Вопрос по теме исследования.

Группы с условиями конечности

1. Разрешимые группы. Теоремы Ф.Холла, Картера. Конечные □-разрешимые группы, теоремы С.А.Чунихина.

2. Нильпотентные группы. Обобщения нильпотентности. Критерий Виландта нильпотентности конечной группы. Подгруппы Фраттини и Фиттинга конечных групп.

3. Полицикличность и сверхразрешимость. Критерий Хупперта сверхразрешимости конечной группы.

4. Периодичность и локальная конечность. Условия минимальности и максимальности в группах. Разрешимые нётеровы и артиновы группы.

5. Формации и многообразия групп. Насыщенные, локальные и композиционные формации конечных групп. F-корадикал и F-проекторы конечных групп.

6. Минимальные не F-группы и их общие свойства. Группы Шмидта и их основные свойства. Минимальные несверхразрешимые группы.

7. Классы Фиттинга. F-радикал и F-инъекторы конечных групп. Произведения формаций и классов Фиттинга.

8. Тождества конечных групп. Теорема Оутс и Пауэлла.

9. Вопрос по теме исследования.

Рекомендуемая литература:

1. Бахтурин Ю.А. Основные структуры алгебры. М.: Наука, 1990.

2. Бахтурин Ю.А. Тождества в алгебрах Ли. М.: Наука, 1985.

3. Бахтурин Ю.А., Ольшанский А.Ю. Тождества. В кн.Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 18. М.: ВИНИТИ, 1988. с. 117-240.

4. Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп. М.: Наука, 1982.

5. Кон П. Универсальная алгебра. М.: Мир ,1968 г.

6. Курош А.Г. Лекции по общей алгебре. М. : Наука , 1962.

7. Курош А.Г. Теория групп. – 3-е изд. М.: Наука, 1967.

8. Мальцев А.И. Алгебраические системы. М. Наука, 1970.

9. Нейман Х. Многообразия групп. М.: Мир, 1969.

10. Ольшанский А.Ю. Геометрия определяющих соотношений в группах. М.: Наука, 1989.

11. Пирс Р. Ассоциативные алгебры. М. Мир. 1986 г.

12. Скорняков Л.А. Элементы общей алгебры. М.: Наука, 1983 г.

13. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, 1974, ч. 1, 1977, ч. 2.

14. Херстейн И. Некоммутативные кольца. М. Мир, 1972.

15. Холл М. Теория групп. М.: ИЛ, 1962.

16. Шеметков Л.А. Формации конечных групп. М.: Наука, 1989.