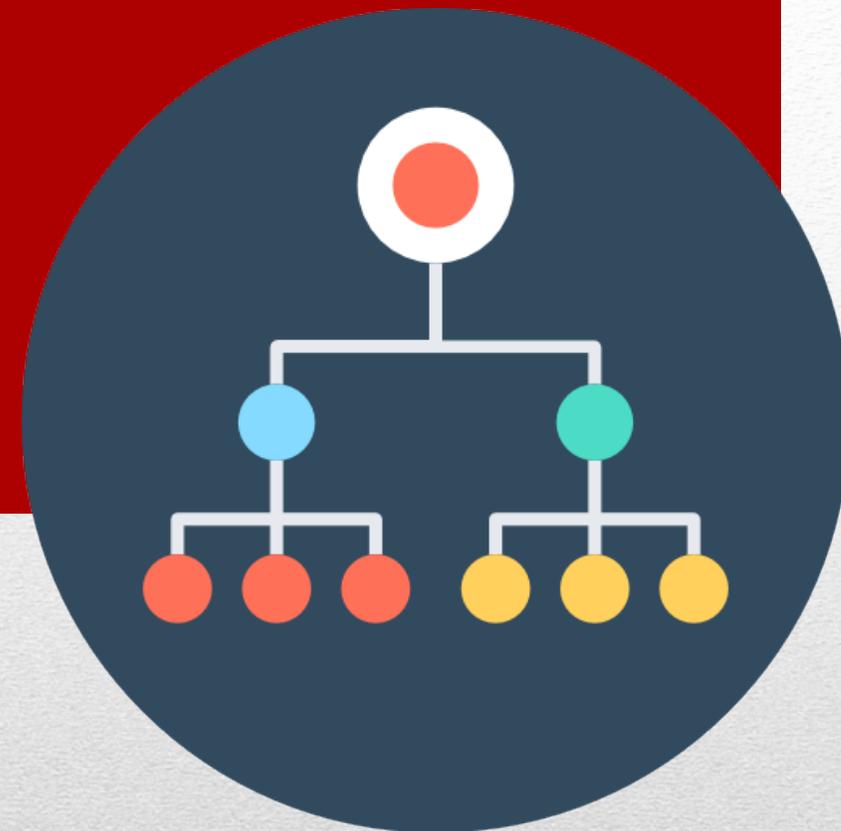


Умение построить **дерево**
игры по заданному
алгоритму и обосновать
выигрышную стратегию



Задача 26

Уровень сложности задания **В**

Макс. балл за выполнение задания **3**

Примерное время выполнения задания (мин.) **30**

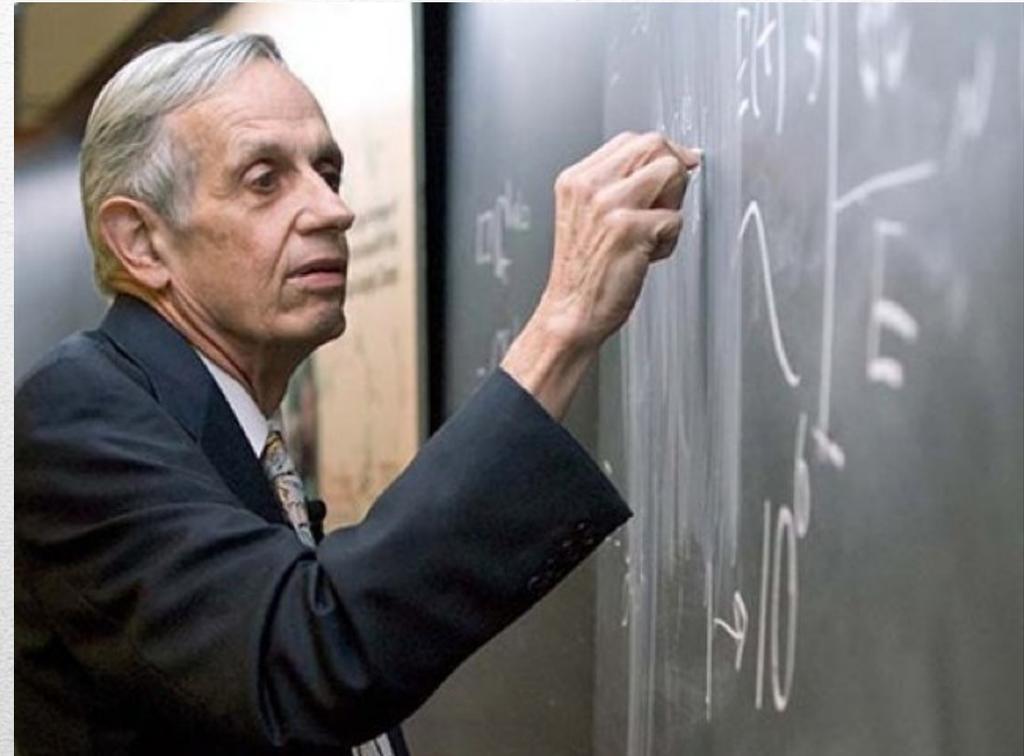
Теория игр

- **Теория игр** - раздел современной математики, изучающий математические модели принятия решений в конфликтных ситуациях
- Ситуация взаимодействия в таких ситуациях может быть описана в виде модели, которую и называют игрой.

Примеры

Конкурирующие компании

Кандидаты, соперничающие на выборах



Американский математик, лауреат **Нобелевской премии** по экономике **Джон Нэш**

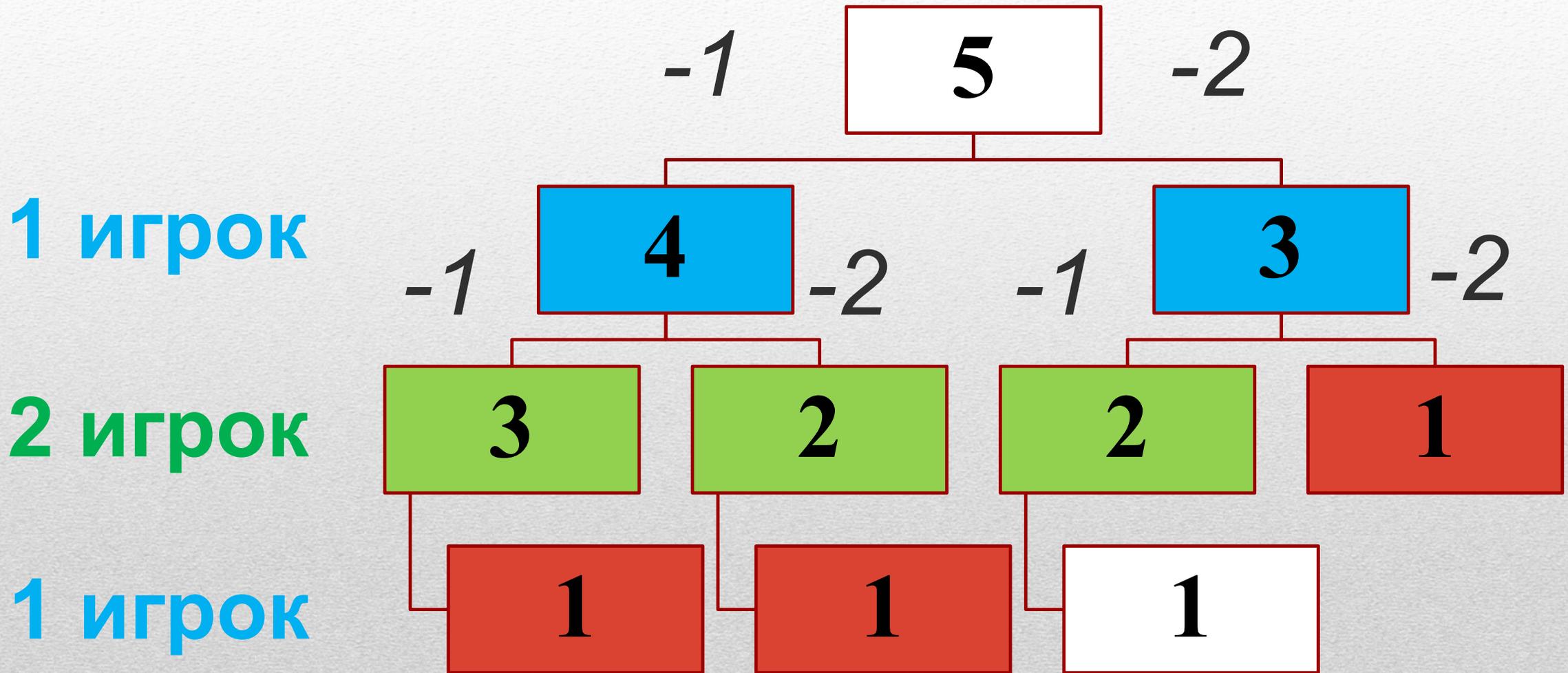
Задача (подводящая)

В кучке лежит **5** камней; играют два игрока, которые по очереди убирают камни из кучки; условие: за один ход можно убрать **1** или **2** камня; выигрывает тот, кто оставит в кучке **1 камень**

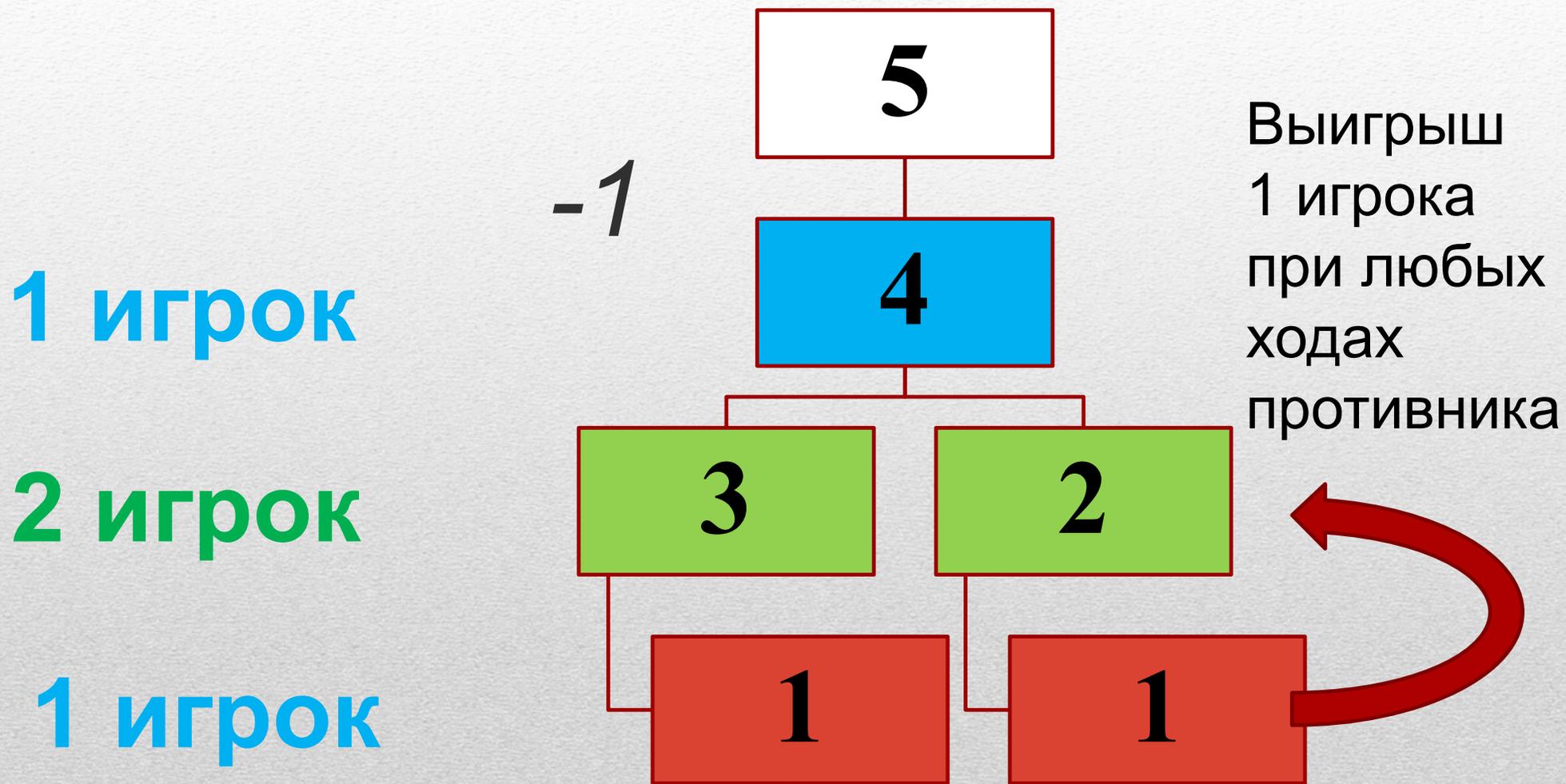


1 игрок	2 игрок

Выигрывает тот, кто оставит в кучке 1 камень



Выигрывает тот, кто оставит в кучке 1 камень



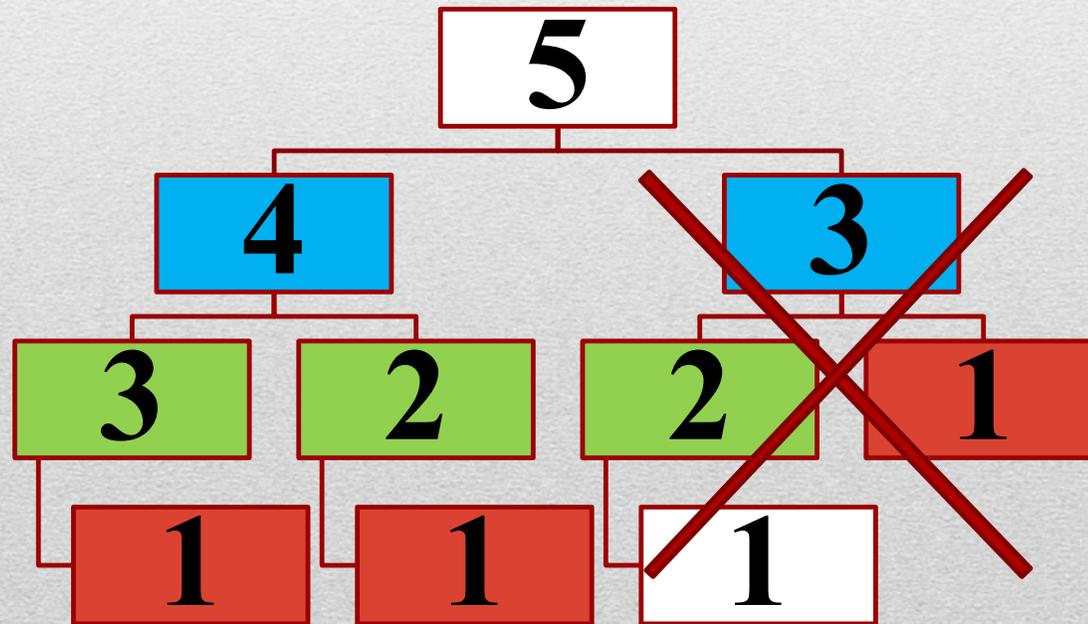
Теоретические основы

Будем говорить, что игрок имеет выигрышную стратегию, если он может выиграть при **любых ходах противника.**

1 игрок

2 игрок

1 игрок



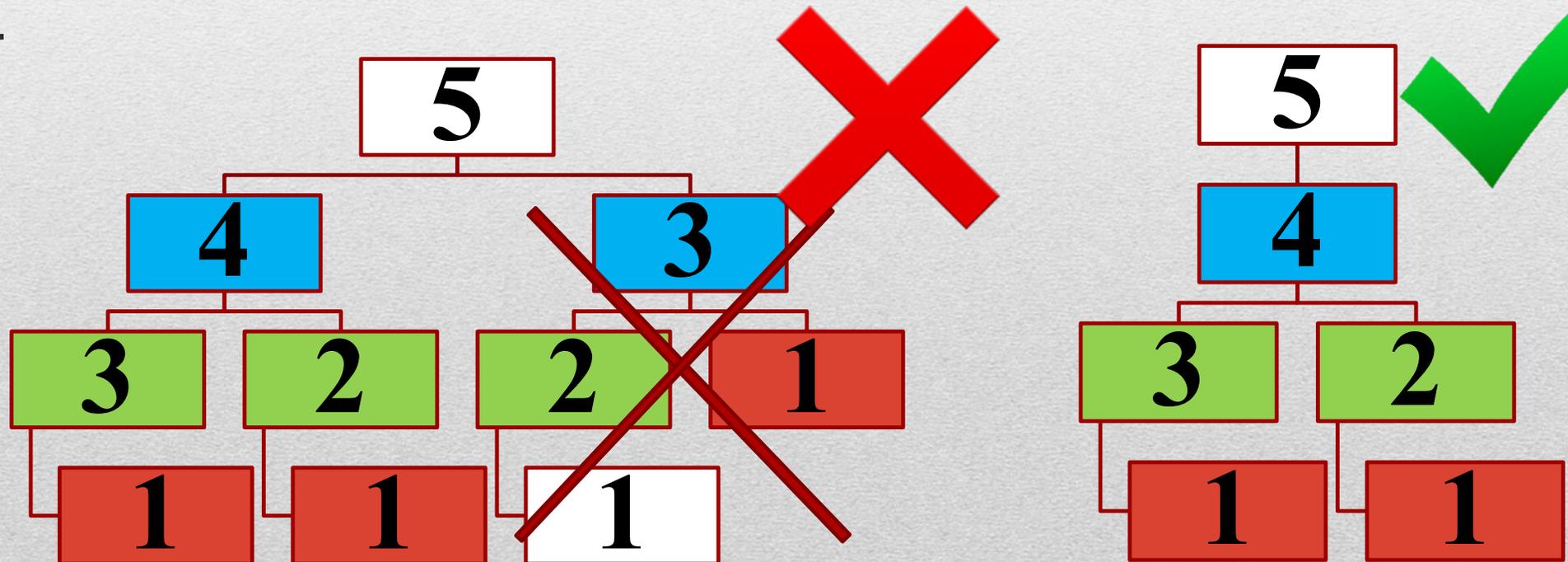
Теоретические основы

Описать стратегию игрока — значит описать, какой ход он должен сделать в любой ситуации, которая ему может встретиться при различной игре противника. В описание выигрышной стратегии **не следует** включать ходы играющего по этой стратегии игрока, не являющиеся для него безусловно выигрышными, т.е. не являющиеся выигрышными независимо от игры противника.

1 игрок

2 игрок

1 игрок



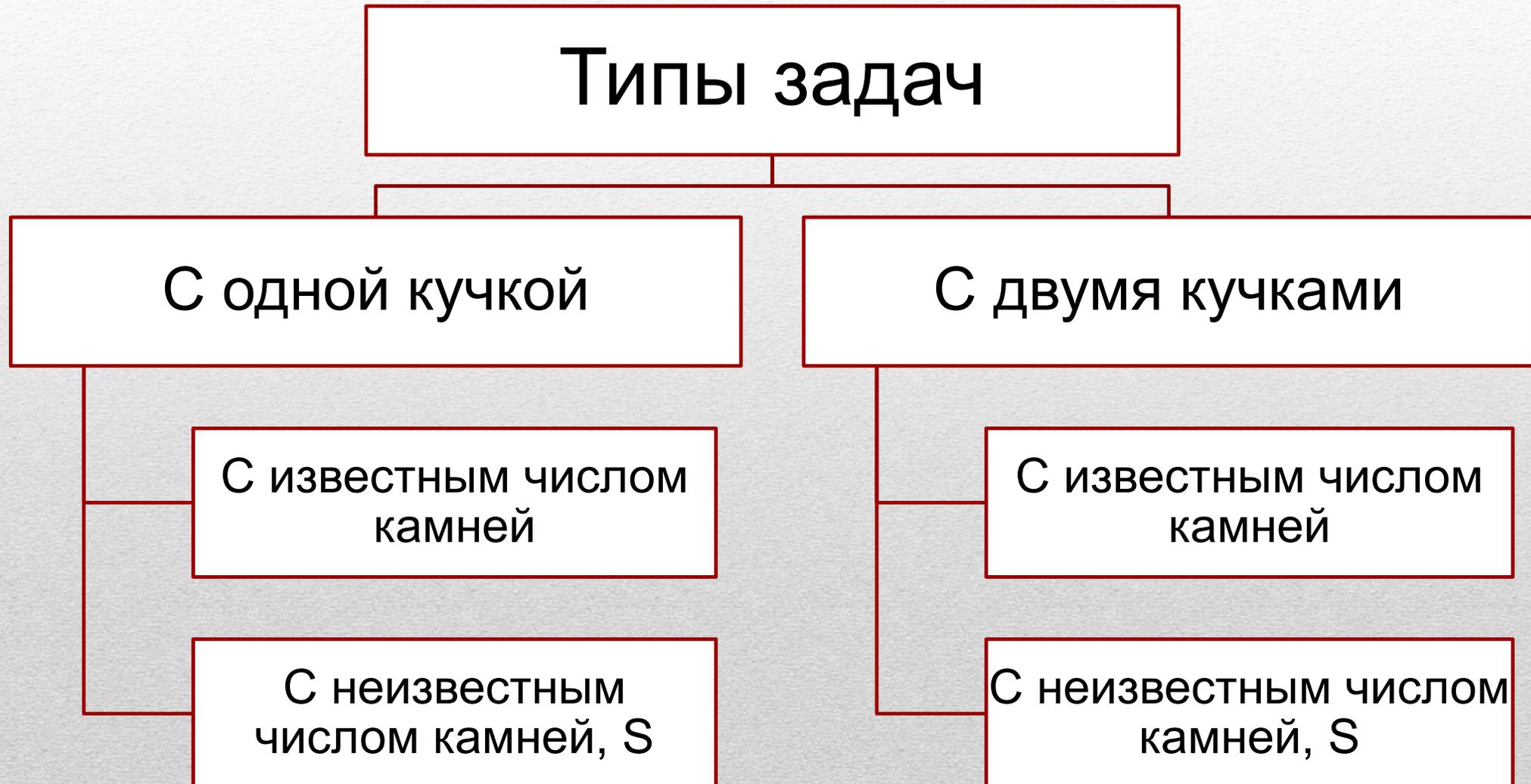
Теоретические основы

Дерево всех партий, возможных при этой выигрышной стратегии строится в виде дерева или таблицы. В узлах дерева указывается количество камней в позиции, на ребрах - кто делает ход (или ходы).

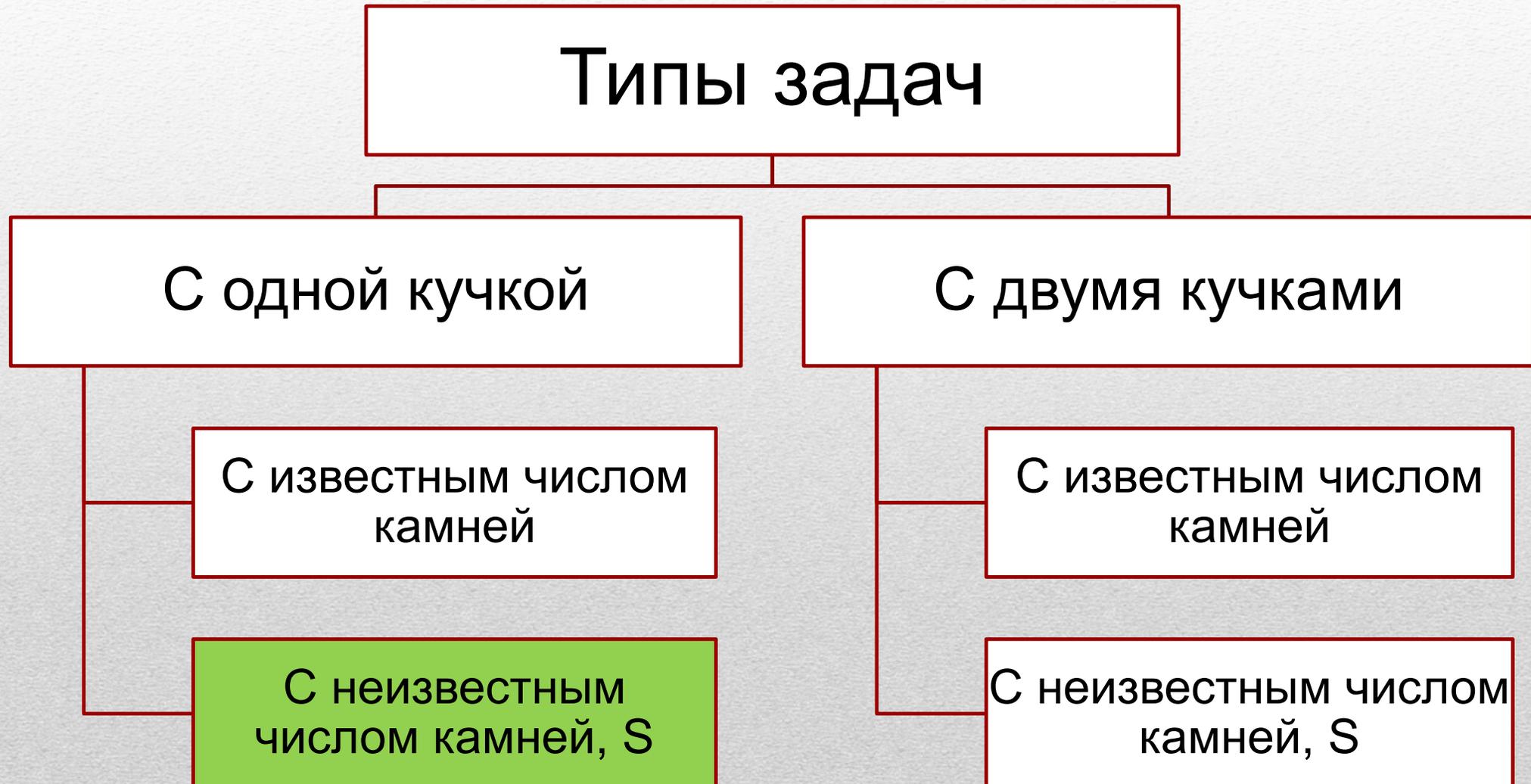
Дерево не должно содержать партии, невозможные при реализации выигрывающим игроком своей выигрышной стратегии.

Например, **полное дерево игры не является верным ответом на это задание.**

Задача № 26



Задача № 26



Задача 26.1

Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу **один** камень или увеличить количество камней в куче **в два раза**.

Например, имея кучу из 15 камней, за один ход можно получить кучу из 16 или 30 камней.



Краткая запись условия задачи

Задача 26.1

У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней.

Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится **не менее 29**.



Задача 26.1



Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 29 или больше камней.



В начальный момент в куче было S камней,

$$1 \leq S \leq 28.$$



Количество
камней S
 $1 \leq S \leq 28$

Петя

+1

*2

не менее 29
29, 30, 31, ...
 ≥ 29

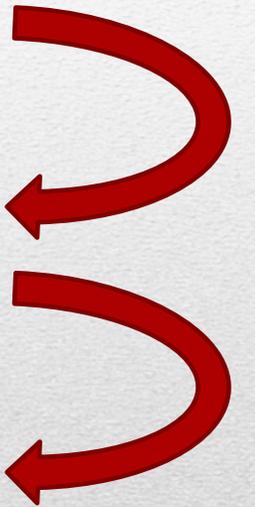


Задача 26.1

Задание 1

Задание 2

Задание 3



Задача 26.1

Количество
камней S
 $1 \leq S \leq 28$

Петя

+1

*2

≥ 29

Задание 1

а) Укажите такие значения числа S , при которых Петя может выиграть в один ход.

Количество
камней S
 $1 \leq S \leq 28$

Петя

+1

*2

≥ 29

Задача 26.1

Задание 1

б) Укажите такое значение S , при котором Петя не может выиграть за один ход, но при любом ходе Пети Ваня может выиграть своим первым ходом. опишите выигрышную стратегию Вани.

Что мы знаем?

$15 \leq S \leq 28$ – выигрывает Петя первым ходом

Количество
камней S
 $1 \leq S \leq 28$

Петя

+1

*2

≥ 29

Задача 26.1

Задание 1

б) Укажите такое значение S , при котором Петя не может выиграть за один ход, но при любом ходе Пети Ваня может выиграть своим первым ходом. опишите выигрышную стратегию Вани.

$15 \leq S \leq 28$ – выигрывает Петя первым ходом

14

Петя

Ваня

Задача 26.1

Количество
камней S
 $1 \leq S \leq 28$

Петя

+1

*2

≥ 29

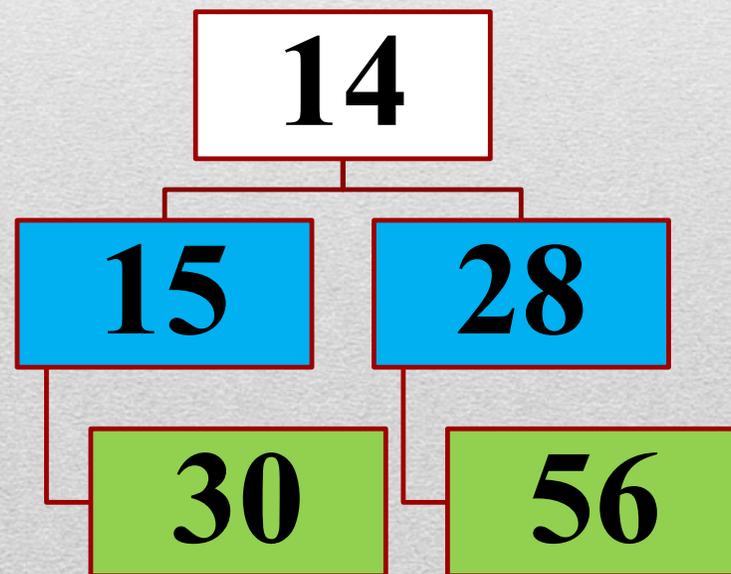
Задание 1

б) Укажите такое значение S , при котором Петя не может выиграть за один ход, но при любом ходе Пети Ваня может выиграть своим первым ходом. опишите выигрышную стратегию Вани.

$S = 14$ – выигрывает Ваня первым ходом

Петя

Ваня



Задача 26.1

Количество
камней S
 $1 \leq S \leq 28$

Петя

+1

*2

≥ 29

Задание 2

Укажите два таких значения S , при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причем одновременно выполняются два условия:
— Петя не может выиграть за один ход;
— Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.
Для указанных значений S опишите выигрышную стратегию Пети.

Что мы знаем?

$15 \leq S \leq 28$ – выигрывает Петя
первым ходом

$S = 14$ – выигрывает Ваня
первым ходом

Задача 26.1

Что мы знаем?

$15 \leq S \leq 28$ –

*выигрывает Петя
первым ходом*

$S = 14$ –

*выигрывает Ваня
первым ходом*

Запоминаем!

$15 \leq S \leq 28$ –

*выигрышная
позиция с первого
хода*

$S = 14$ –

*проигрышная
позиция*

Количество
камней S
 $1 \leq S \leq 28$

Петя

+1

*2

≥ 29

Задача 26.1

Задание 2

Петя хочет выиграть вторым ходом!

Что мы знаем?

$S = 14$ – проигрышная позиция

Какие операции определены?

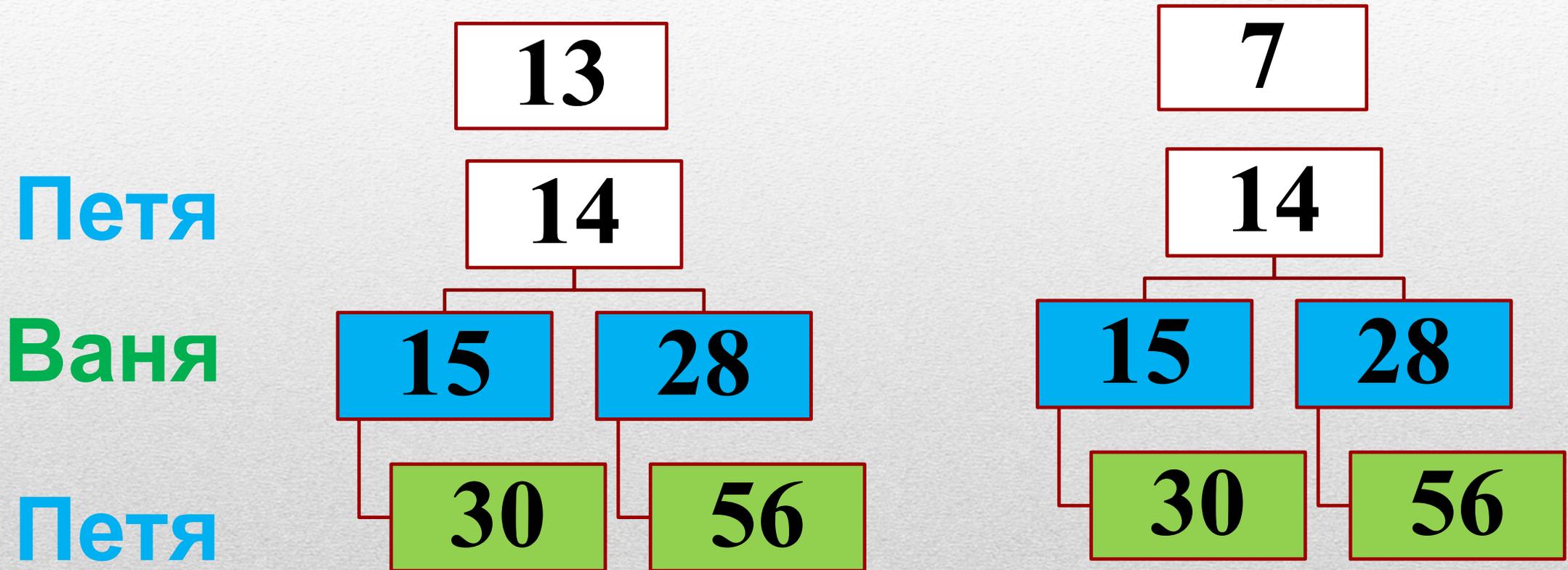
Петя

Ваня

14

Задача 26.1

Задание 2



$S = 14$ – проигрышная позиция (см. п. 1 б)

Ответ: $S = 7$, 13 выигрывает Петя вторым ходом

Задача 26.1

Количество
камней S
 $1 \leq S \leq 28$

Петя

+1

*2

≥ 29

Задание 3

Укажите значение S , при котором одновременно выполняются два условия:

— у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;

— у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

Для указанного значения S опишите выигрышную стратегию Вани. Постройте дерево всех партий, возможных при этой выигрышной стратегии (в виде рисунка или таблицы).

Что мы знаем?

$15 \leq S \leq 28$ – выигрышная позиция с первого хода

$S = 14$ – проигрышная позиция

$S = 7, 13$ выигрышная позиция со второго хода

Задача 26.1

Задание 3

Количество
камней S
 $1 \leq S \leq 28$

Петя

+1

*2

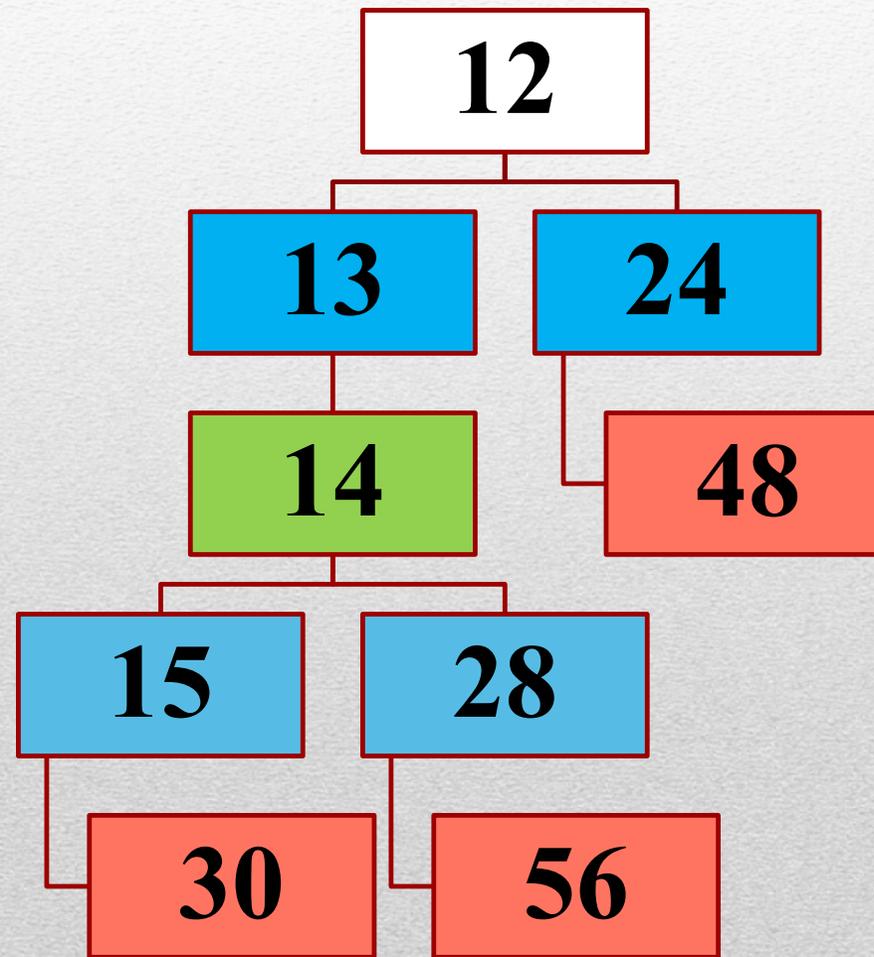
≥ 29

Петя

Ваня

Петя

Ваня



Задача 26.2

Два игрока, Паша и Валя, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Паша. За один ход игрок может добавить в кучу один камень или увеличить количество камней в куче в два раза. Например, имея кучу из 7 камней, за один ход можно получить кучу из 14 или 8 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней.

Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 16. Если при этом в куче оказалось не более 22 камней, то победителем считается игрок, сделавший последний ход. В противном случае победителем становится его противник. Например, если в куче было 15 камней и Паша удвоит количество камней в куче, то игра закончится и победителем будет Валя.

В начальный момент в куче было S камней, $1 \leq S \leq 15$.

Будем говорить, что игрок имеет выигрышную стратегию, если он может выиграть при любых ходах противника. Описать стратегию игрока — значит описать, какой ход он должен сделать в любой ситуации, которая ему может встретиться при различной игре противника.



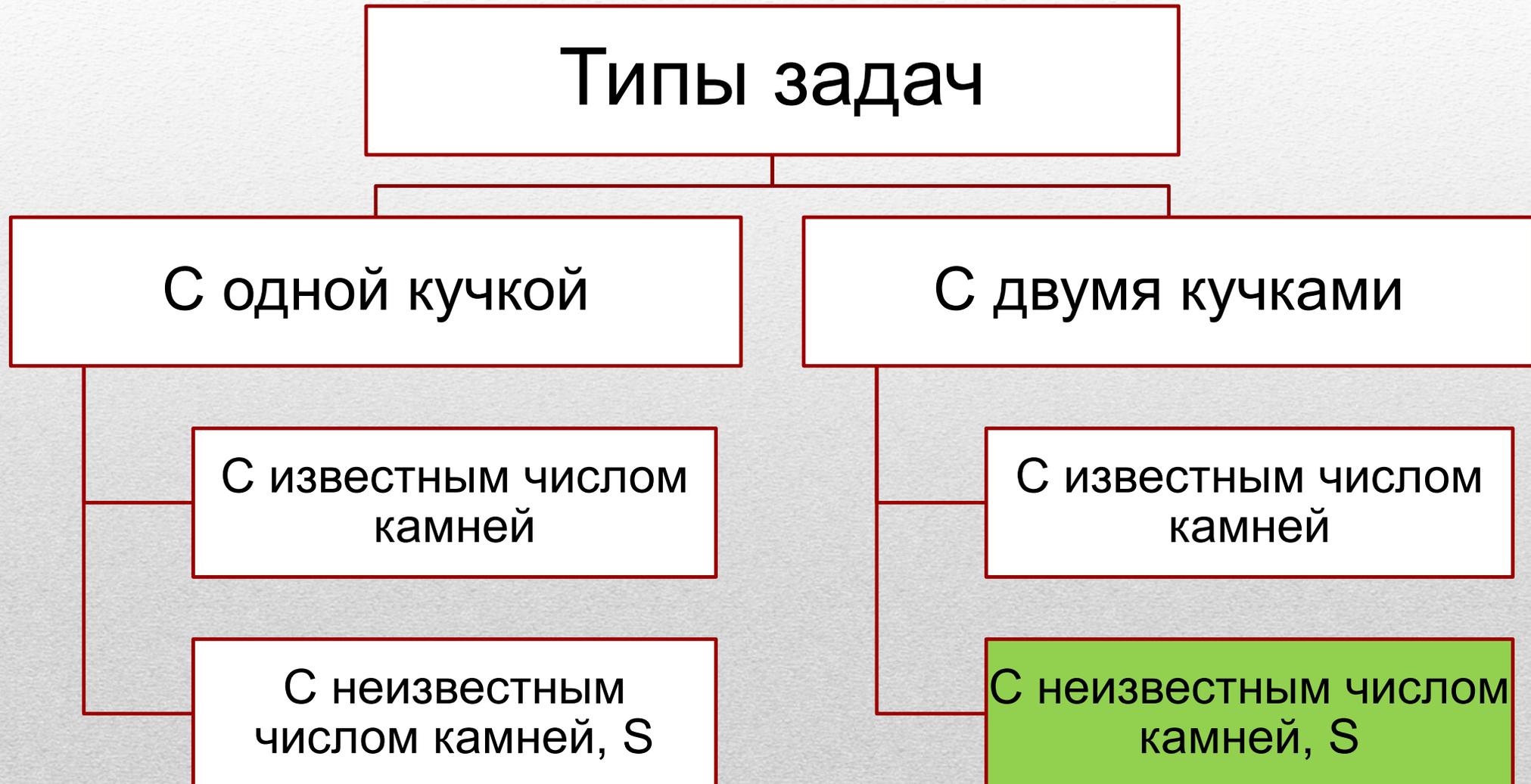
Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 16.



Если при этом в куче оказалось не более 22 камней, то победителем считается игрок, сделавший последний ход. В противном случае победителем становится его противник.

Например, если в куче было 15 камней и Паша удвоит количество камней в куче, то игра закончится и победителем будет Валя.

Задача № 26



Задача 26.2

Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежат **две кучи камней**. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может **добавить** в одну из куч (по своему выбору) **один камень** или увеличить количество камней в куче **в три раза**.

Например, пусть в одной куче 10 камней, а в другой 7 камней; такую позицию в игре будем обозначать $(10, 7)$. Тогда за один ход можно получить любую из четырёх позиций: $(11, 7)$, $(30, 7)$, $(10, 8)$, $(10, 21)$.

Для того чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 68. Победителем считается игрок, сделавший **последний ход**, т.е. первым получивший такую позицию, при которой в кучах будет 68 или больше камней. В начальный момент в первой куче было шесть камней, во второй куче – S камней; $1 \leq S \leq 61$.



$(6, S)$
 $1 \leq S \leq 61$

Петя

+1

*3

Задание 1

а) Укажите все такие значения числа S , при которых Петя может выиграть за один ход.

б) Известно, что Ваня выиграл своим первым ходом после неудачного первого хода Пети. Укажите минимальное значение S , когда такая ситуация возможна.



суммарное количество
камней в кучах

становится не менее 68
 ≥ 68



$(6, S)$
 $1 \leq S \leq 61$

Петя

+1

*3



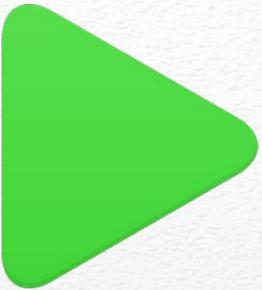
≥ 68

Задание 2 Укажите такое значение S , при котором у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня. Для указанного значения S опишите выигрышную стратегию Пети.

Что мы знаем?

$21 \leq S \leq 61$ – выигрышная позиция с первого хода
 $(6, 21), (6, 22), (6, 23), \dots$



$(6, S)$
 $1 \leq S \leq 61$

Петя

+1

*3



≥ 68

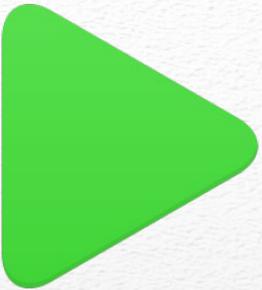


Петя хочет выиграть
своим вторым ходом

Строим дерево

$S = 20$

$(6, 20)$



$(6, S)$
 $1 \leq S \leq 61$

Петя

+1

*3

Задание 3 Укажите значение S , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.



суммарное количество
камней в кучах
становится не менее 68
 ≥ 68



(6, S)
 $1 \leq S \leq 61$

Петя

+1

*3

Задание 3

Строим дерево

$S = 19$

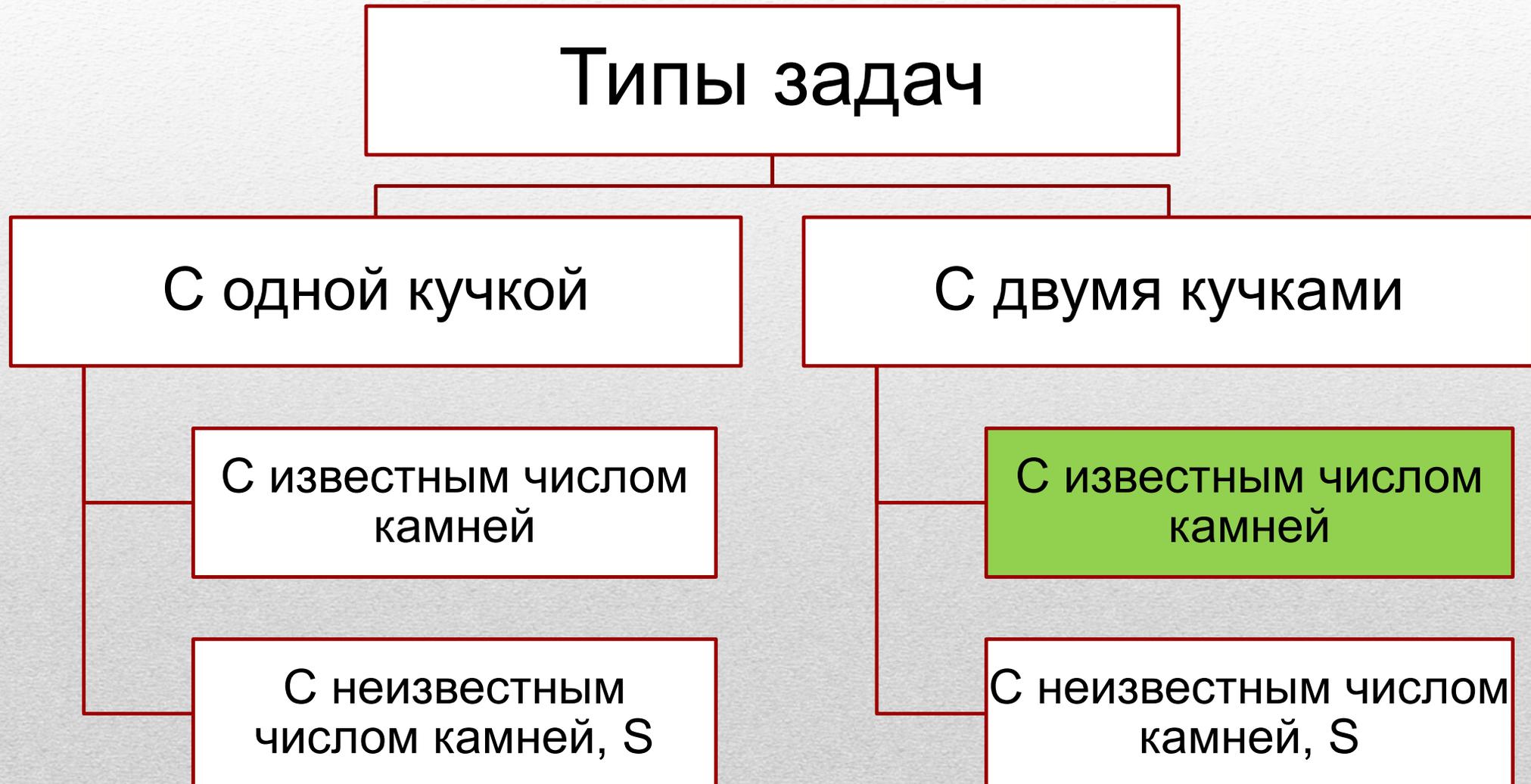
(6, 19)



≥ 68



Задача № 26



Задача № 26

Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) **один** камень или увеличить количество камней в куче в **два раза**. Например, пусть в одной куче 10 камней, а в другой 7 камней; такую позицию в игре будем обозначать $(10, 7)$. Тогда за один ход можно получить любую из четырёх позиций: $(11, 7)$, $(20, 7)$, $(10, 8)$, $(10, 14)$. Для того чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней.

Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 77. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, что в кучах всего будет 77 или больше камней.

Будем говорить, что игрок имеет *выигрышную стратегию*, если он может выиграть при любых ходах противника. Описать стратегию игрока – значит описать, какой ход он должен сделать в любой ситуации, которая ему может встретиться при различной игре противника. Например, при начальных позициях $(6, 36)$, $(7, 35)$, $(9, 34)$ выигрышная стратегия есть у Пети. Чтобы выиграть, ему достаточно удвоить количество камней во второй куч

Задача № 26

Задание 1. Для каждой из начальных позиций $(6, 35)$, $(8, 34)$ укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию. В каждом случае опишите выигрышную стратегию; объясните, почему эта стратегия ведёт к выигрышу, и укажите, какое наибольшее количество ходов может потребоваться победителю для выигрыша при этой стратегии.

Задание 2. Для каждой из начальных позиций $(6, 34)$, $(7, 34)$, $(8, 33)$ укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию. В каждом случае опишите выигрышную стратегию; объясните, почему эта стратегия ведёт к выигрышу, и укажите, какое наибольшее количество ходов может потребоваться победителю для выигрыша при этой стратегии.

Задание 3. Для начальной позиции $(7, 33)$ укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию. Опишите выигрышную стратегию; объясните, почему эта стратегия ведёт к выигрышу, и укажите, какое наибольшее количество ходов может потребоваться победителю для выигрыша при этой стратегии. Постройте дерево всех партий, возможных при указанной Вами выигрышной стратегии. Представьте дерево в виде рисунка или таблицы.

Оформление

Оформление на примере анализа реального бланка

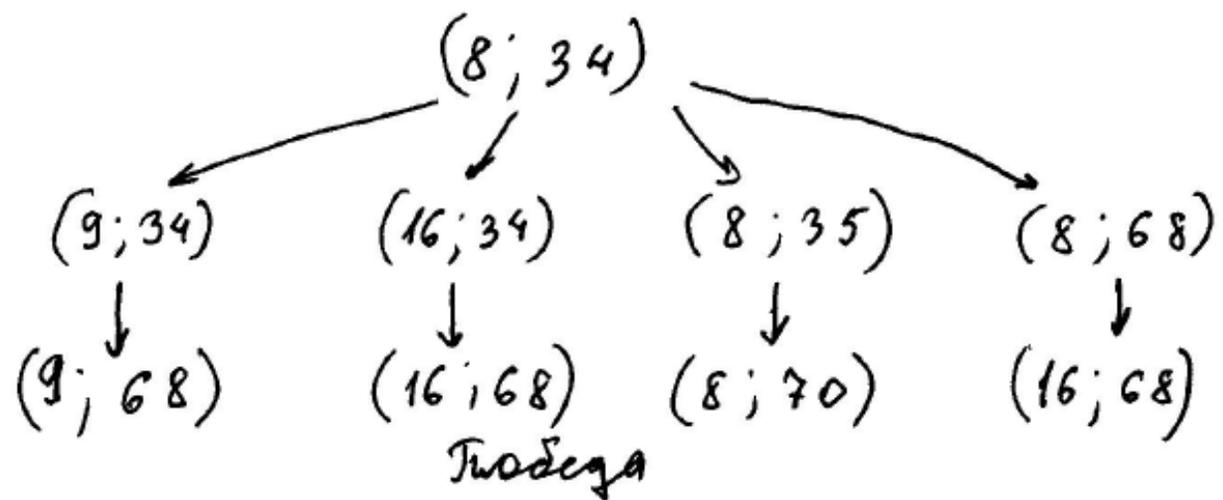
n 26

Задача 1.

нач. кол-во камней
ход Петра
кон. кол-во камней
ход ~~Вани~~ Вани
кон. кол-во камней

подсказка

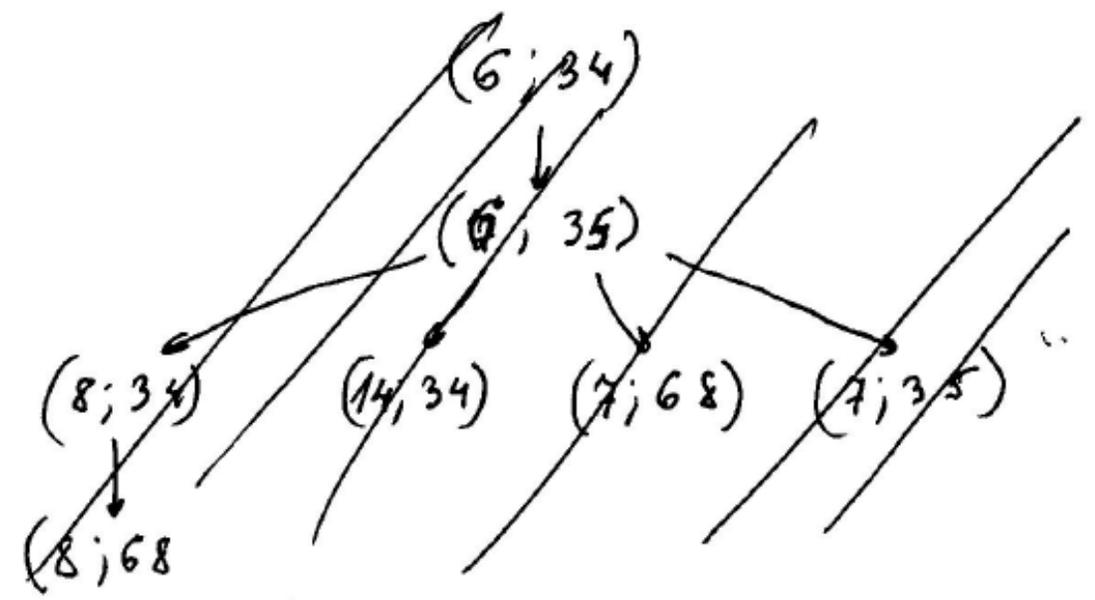
Ответ. Выигрывающую стратегию имеет Ваня, кол-во ходов: 1.

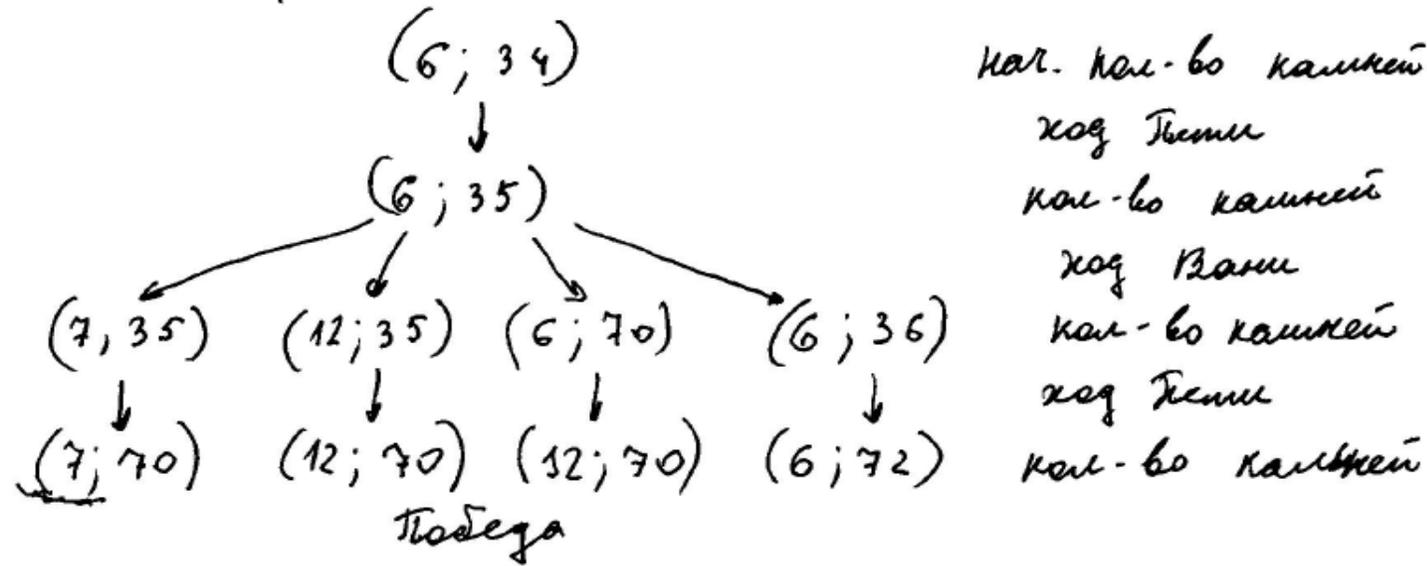


ход Паши
 кол-во камней
 ход Васьки
 кол-во камней

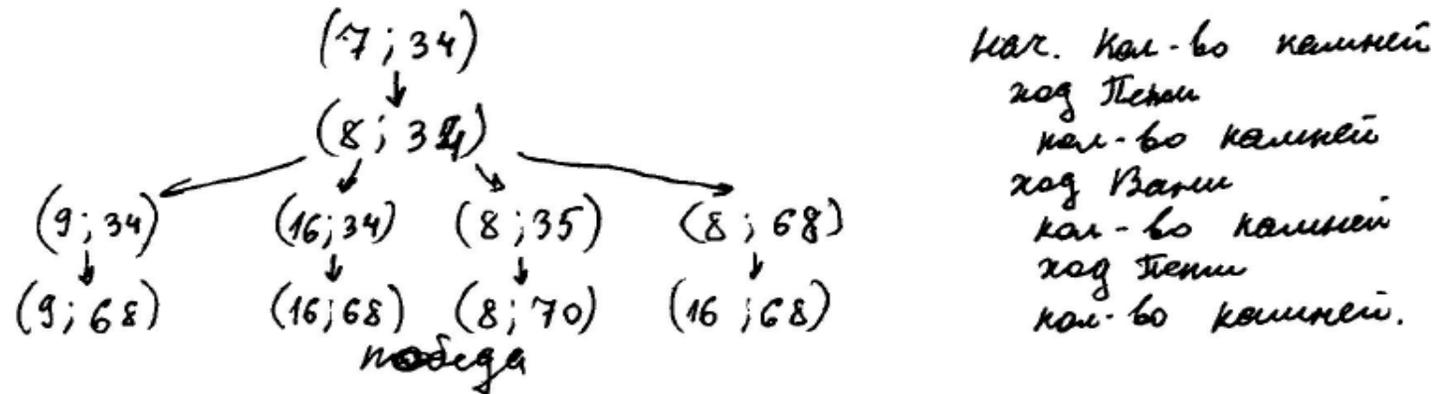
Ответ: Выигрышную стратегию имеет Васа, кол-во ходов: 8.

Задача 2

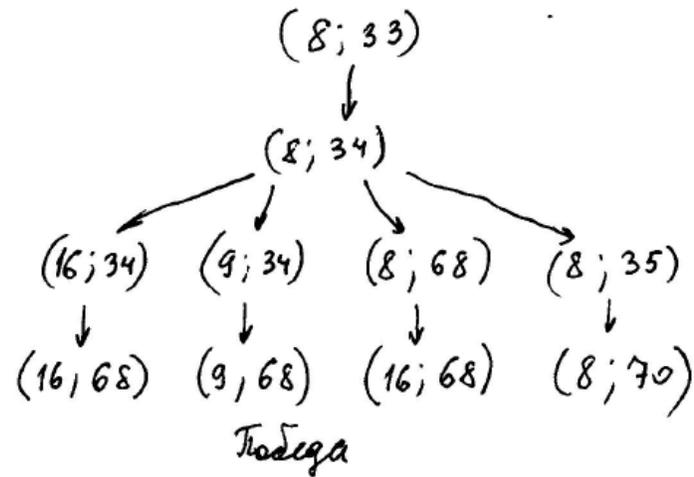




Ответ: выигрышную стратегию имеет Петя; кол-во ходов: 2.

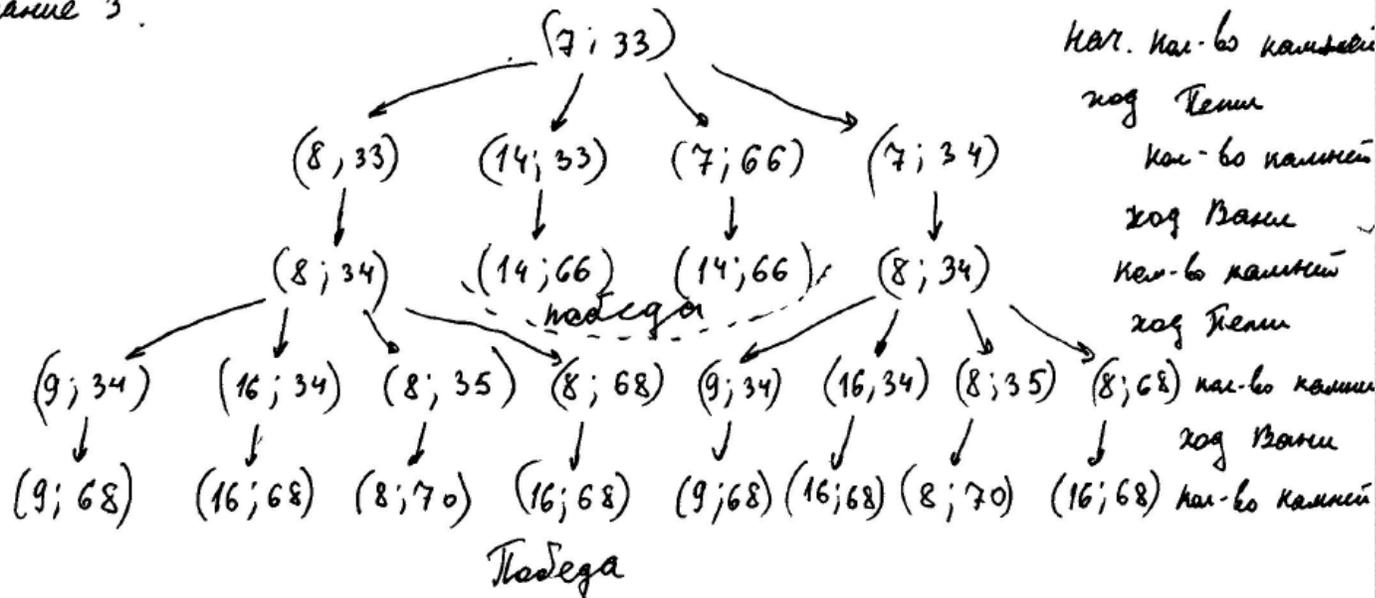


Ответ: выигрышную стратегию имеет Петя; кол-во ходов: 2.



кар. кар-во камней
 ход Петя
 кар-во камней
 ход Ваня
 кар-во камней
 ход Петя
 кар-во камней

Ответ: выигрышно стратегия имеет Петя; кар-во : ходов : 2
 Задача 3.



кар. кар-во камней
 ход Петя
 кар-во камней
 ход Ваня
 кар-во камней
 ход Петя
 кар-во камней
 ход Ваня
 кар-во камней

Ответ: выигрышно стратегия имеет Ваня. кар-во : ходов : 2