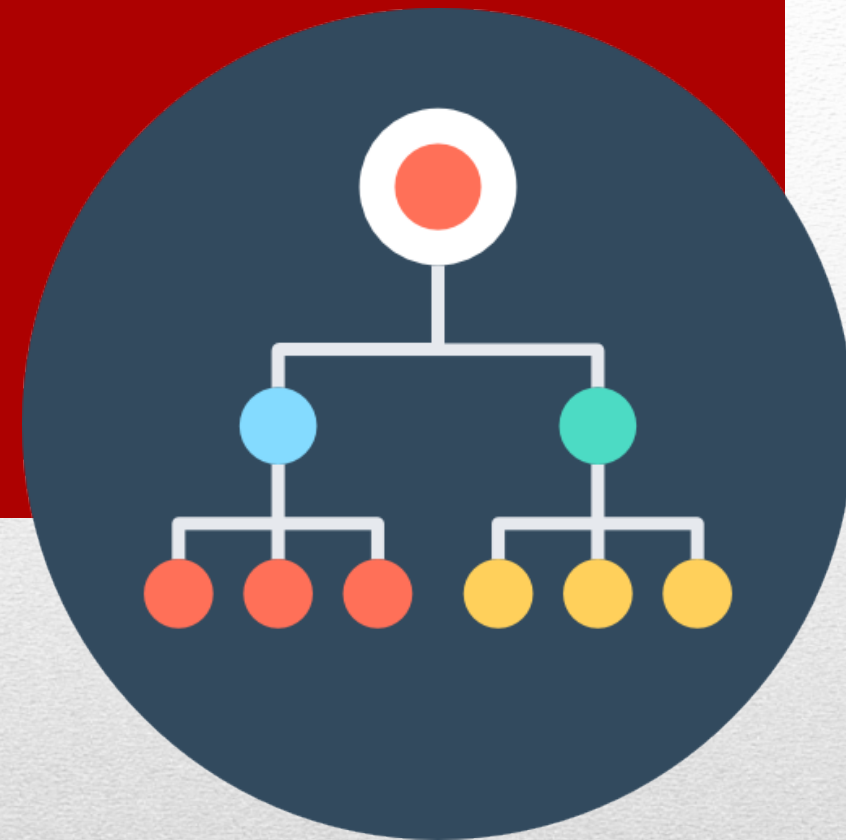


Умение построить **дерево**  
**игры** по заданному  
алгоритму и обосновать  
**выигрышную стратегию**



# Задача 26

Уровень сложности задания **В**

Макс. балл за выполнение задания **3**

Примерное время выполнения задания (мин.) **30**

---

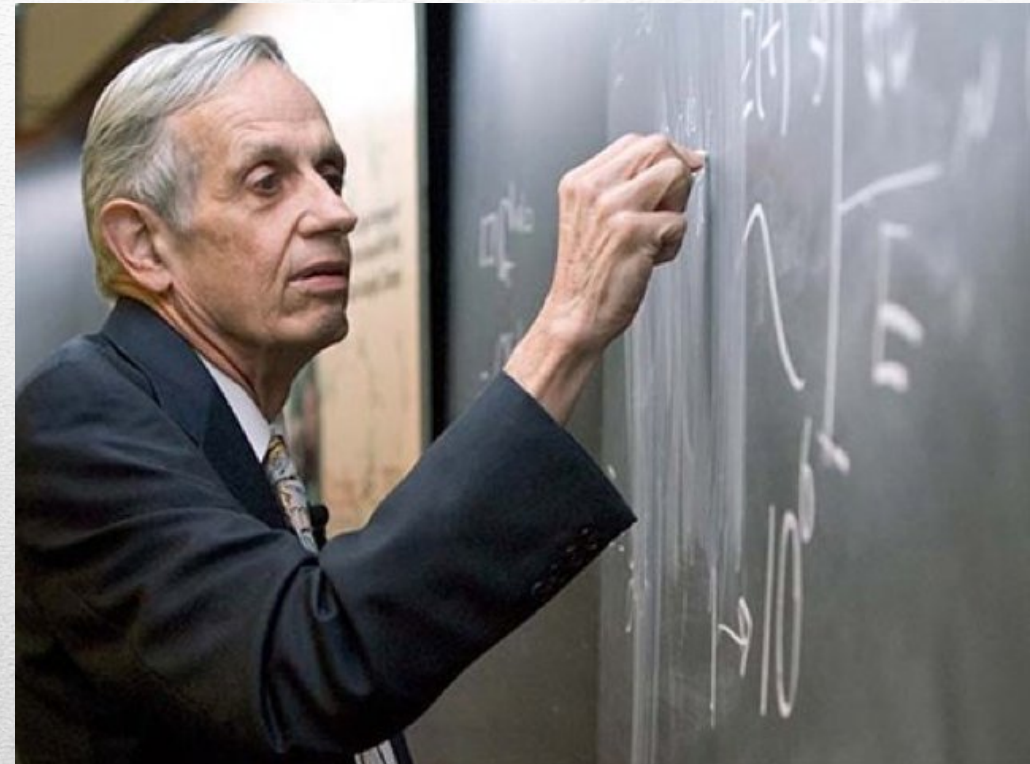
# Теория игр

- **Теория игр** - раздел современной математики, изучающий математические модели принятия решений в конфликтных ситуациях
- Ситуация взаимодействия в таких ситуациях может быть описана в виде модели, которую и называют игрой.

## *Примеры*

Конкурирующие компании

Кандидаты, соперничающие на выборах



Американский математик, лауреат **Нобелевской премии** по экономике **Джон Нэш**

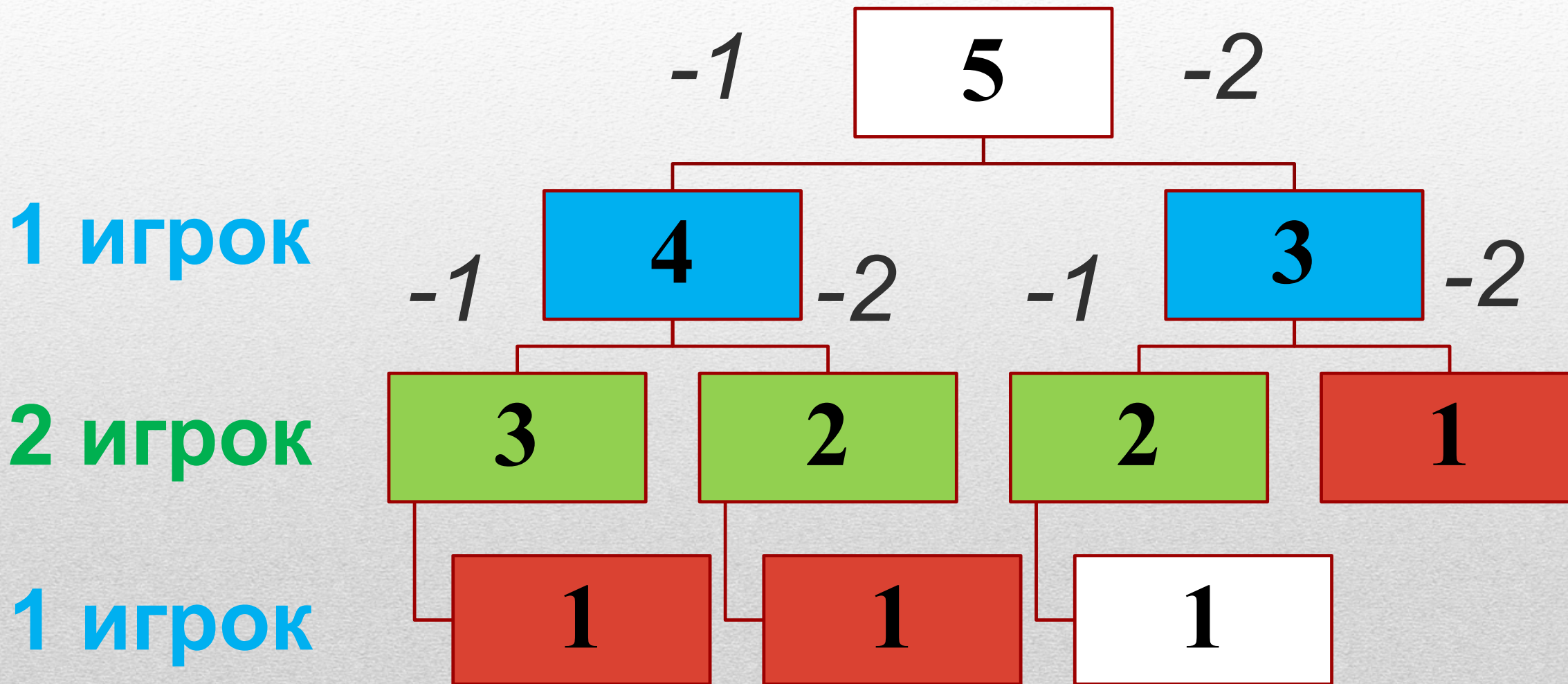
# Задача (подводящая)

В кучке лежит **5** камней; играют два игрока, которые по очереди убирают камни из кучки; условие: за один ход можно убрать **1** или **2** камня; выигрывает тот, кто оставит в кучке **1 камень**

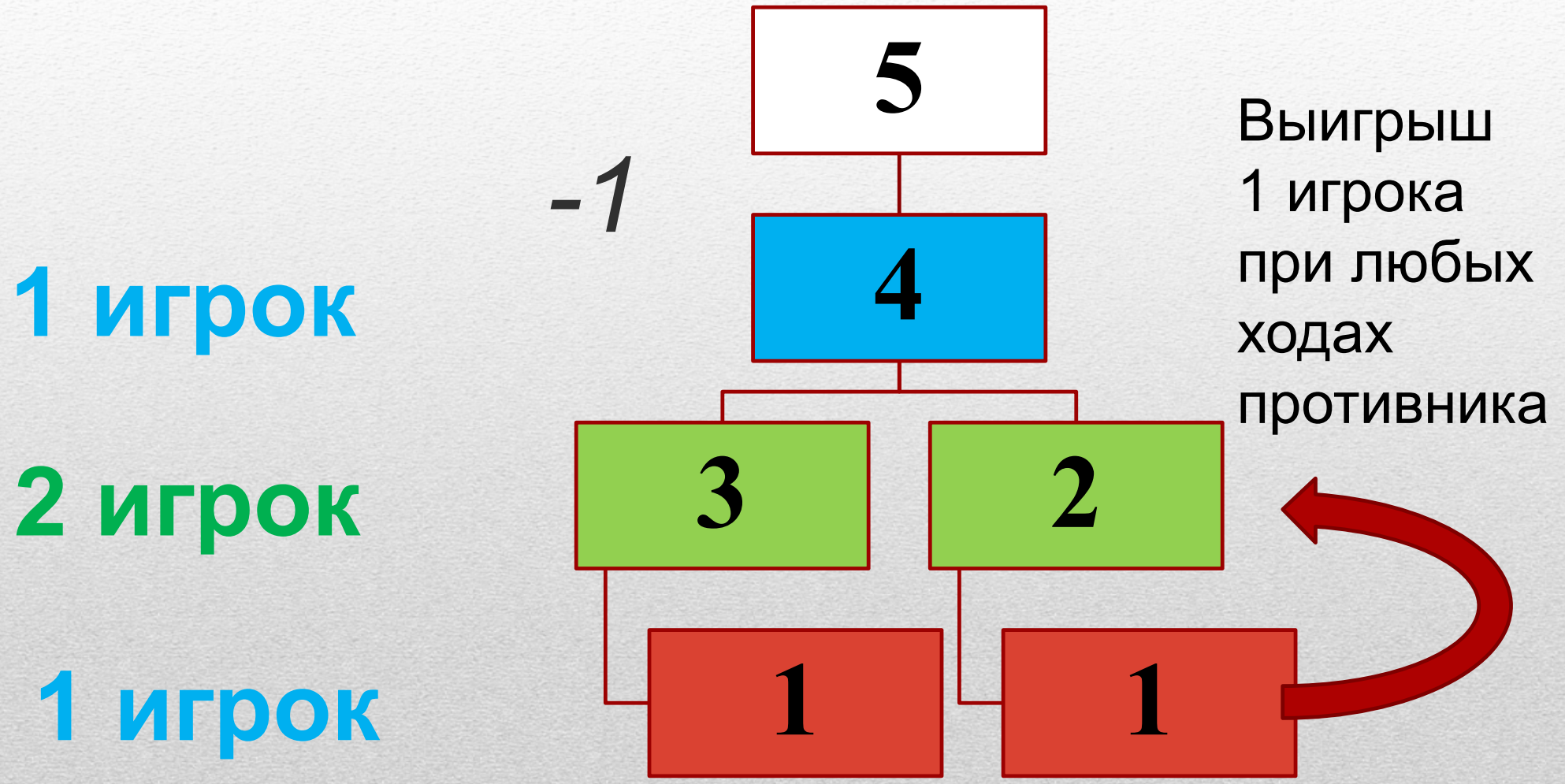


1 игрок	2 игрок

Выигрывает тот, кто оставит в кучке 1 камень



Выигрывает тот, кто оставит в кучке 1 камень



1 игрок

2 игрок

1 игрок

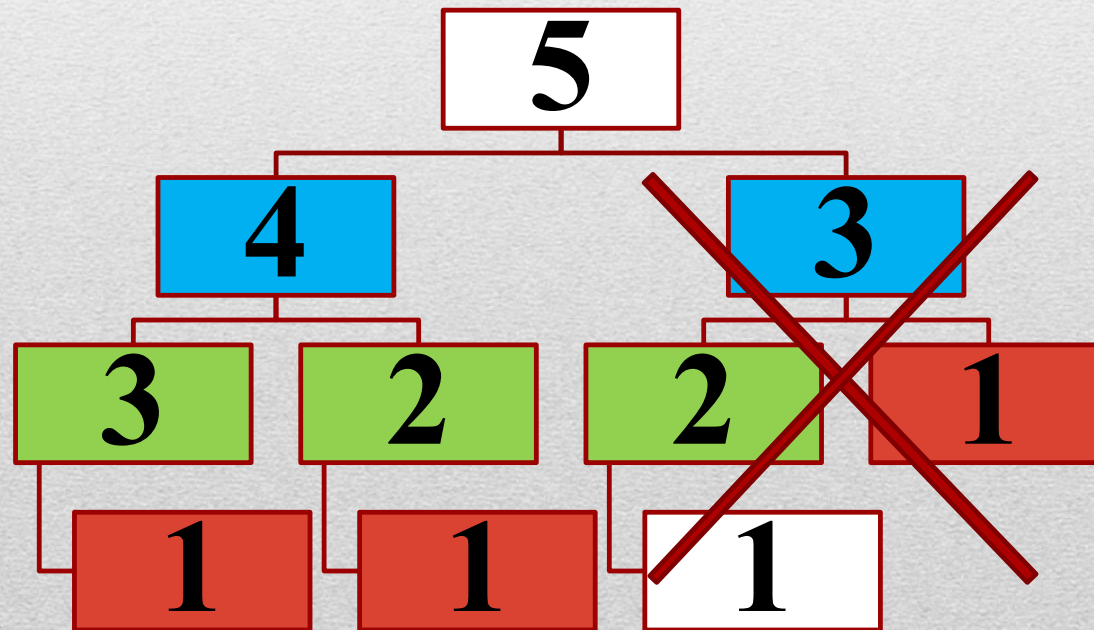
# Теоретические основы

Будем говорить, что игрок имеет выигрышную стратегию, если он может выиграть при **любых ходах противника.**

1 игрок

2 игрок

1 игрок



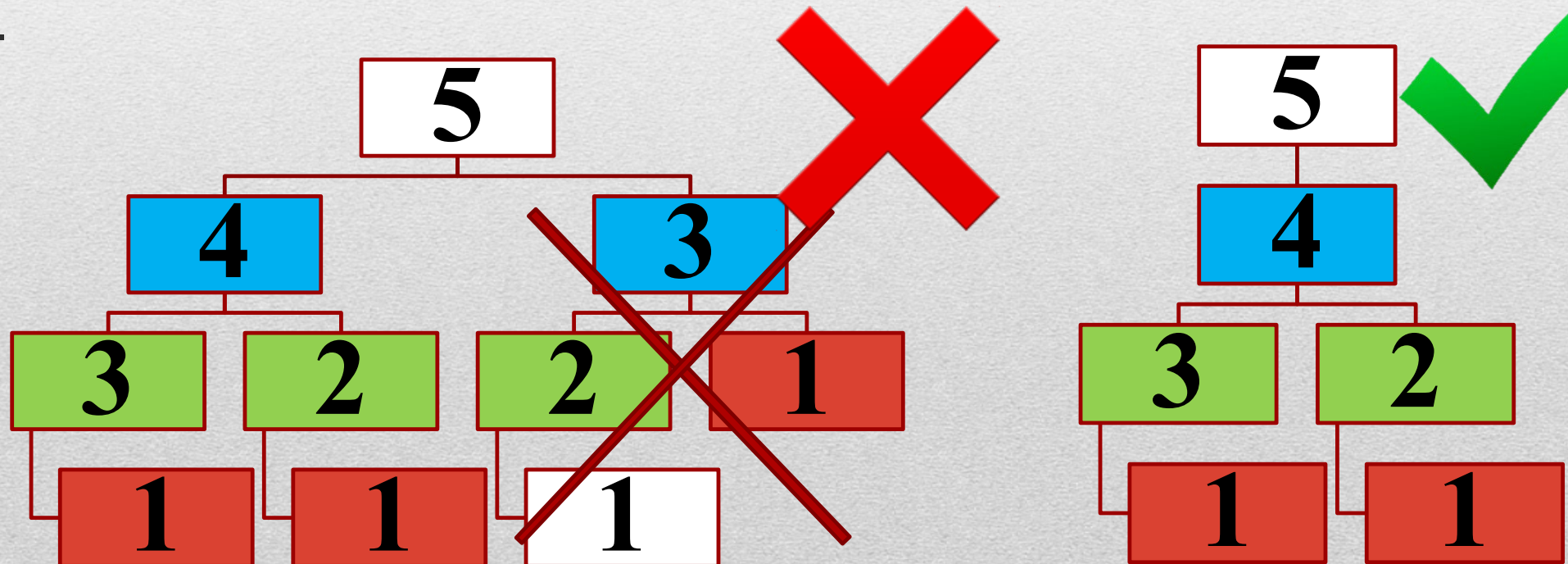
# Теоретические основы

Описать стратегию игрока — значит описать, какой ход он должен сделать в любой ситуации, которая ему может встретиться при различной игре противника. В описание выигрышной стратегии **не следует** включать ходы играющего по этой стратегии игрока, не являющиеся для него безусловно выигрышными, т.е. не являющиеся выигрышными независимо от игры противника.

1 игрок

2 игрок

1 игрок



# Теоретические основы

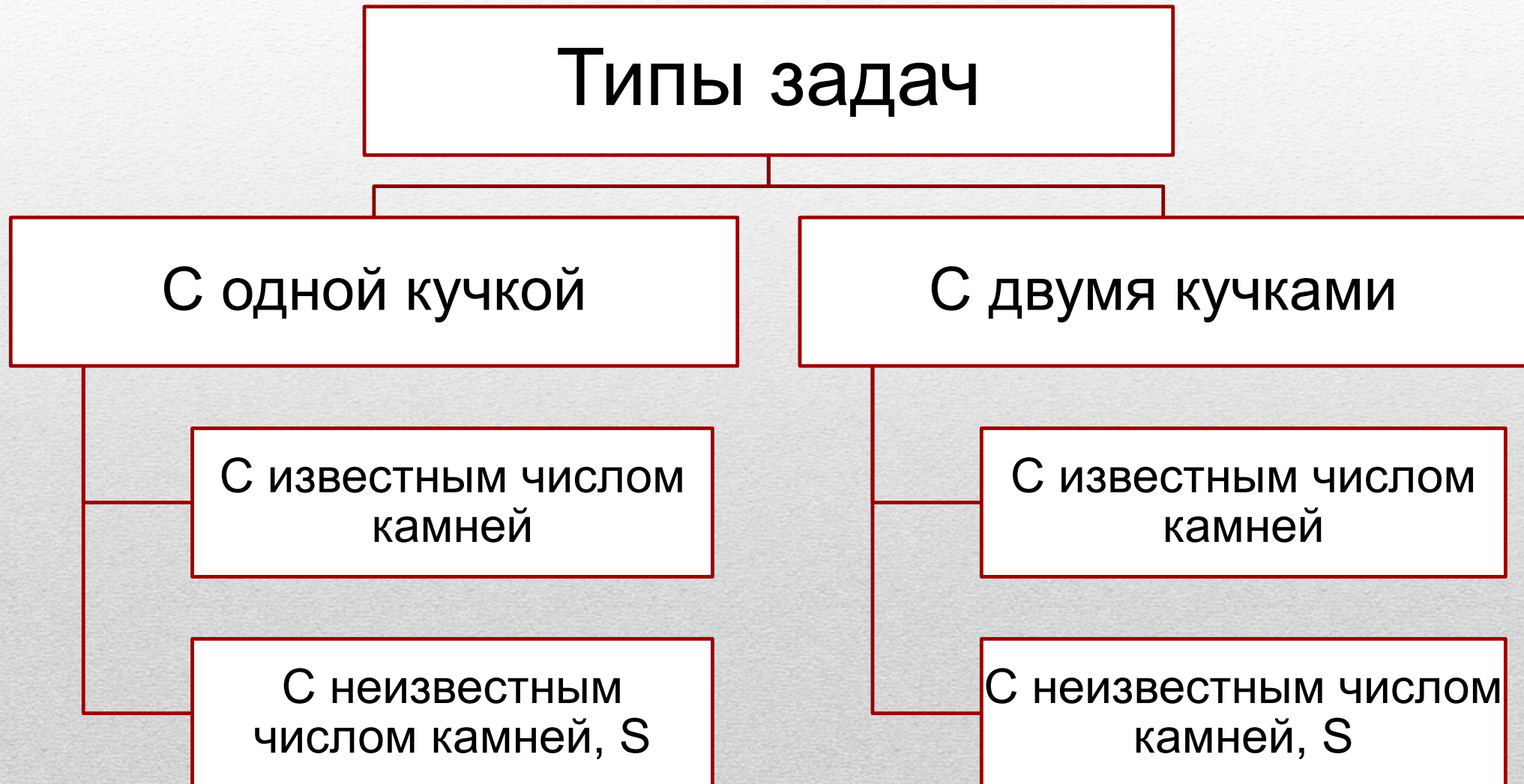
Дерево всех партий, возможных при этой выигрышной стратегии строится в виде дерева или таблицы. В узлах дерева указывается количество камней в позиции, на ребрах - кто делает ход (или ходы).

Дерево не должно содержать партии, невозможные при реализации выигрывающим игроком своей выигрышной стратегии.

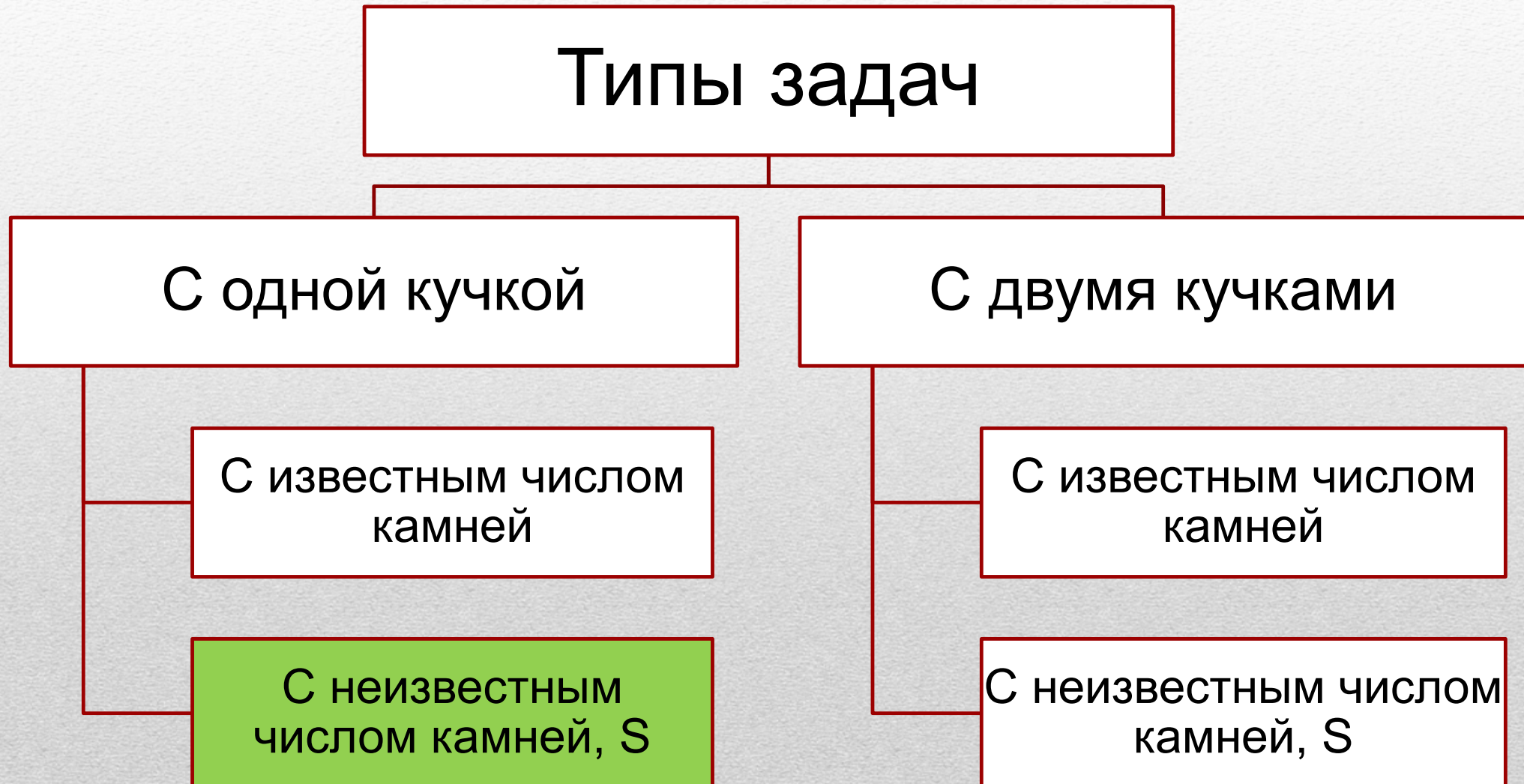
Например, **полное дерево игры не является верным ответом на это задание.**



# Задача № 26



# Задача № 26



# Задача 26.1

Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу **один** камень или увеличить количество камней в куче **в два раза**.

*Например, имея кучу из 15 камней, за один ход можно получить кучу из 16 или 30 камней.*



**Краткая запись условия задачи**

# Задача 26.1

У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней.

Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится **не менее 29**.



# Задача 26.1



Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 29 или больше камней.



В начальный момент в куче было  $S$  камней,

$$1 \leq S \leq 28.$$



Количество  
камней  $S$   
 $1 \leq S \leq 28$

Петя

+1

\*2

не менее 29  
29, 30, 31, ...  
 $\geq 29$

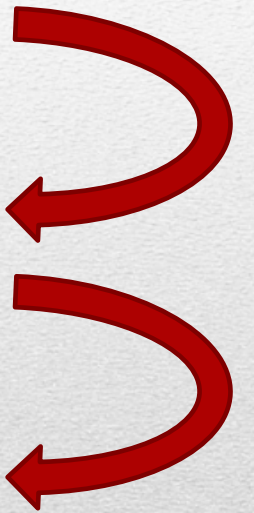


## Задача 26.1

Задание 1

Задание 2

Задание 3



# Задача 26.1

Количество  
камней  $S$   
 $1 \leq S \leq 28$

Петя

+1

\*2

$\geq 29$

## Задание 1

а) Укажите такие значения числа  $S$ , при которых Петя может выиграть в один ход.

Количество  
камней  $S$   
 $1 \leq S \leq 28$

Петя

+1

\*2

$\geq 29$

# Задача 26.1

## Задание 1

б) Укажите такое значение  $S$ , при котором Петя не может выиграть за один ход, но при любом ходе Пети Ваня может выиграть своим первым ходом. опишите выигрышную стратегию Вани.

**Что мы знаем?**

$15 \leq S \leq 28$  – выигрывает Петя первым ходом



Количество  
камней  $S$   
 $1 \leq S \leq 28$

Петя

+1

\*2

$\geq 29$

# Задача 26.1

### Задание 1

б) Укажите такое значение  $S$ , при котором Петя не может выиграть за один ход, но при любом ходе Пети Ваня может выиграть своим первым ходом. опишите выигрышную стратегию Вани.

*$15 \leq S \leq 28$  – выигрывает Петя первым ходом*

**14**

Петя

Ваня

# Задача 26.1

Количество  
камней  $S$   
 $1 \leq S \leq 28$

Петя

+1

\*2

$\geq 29$

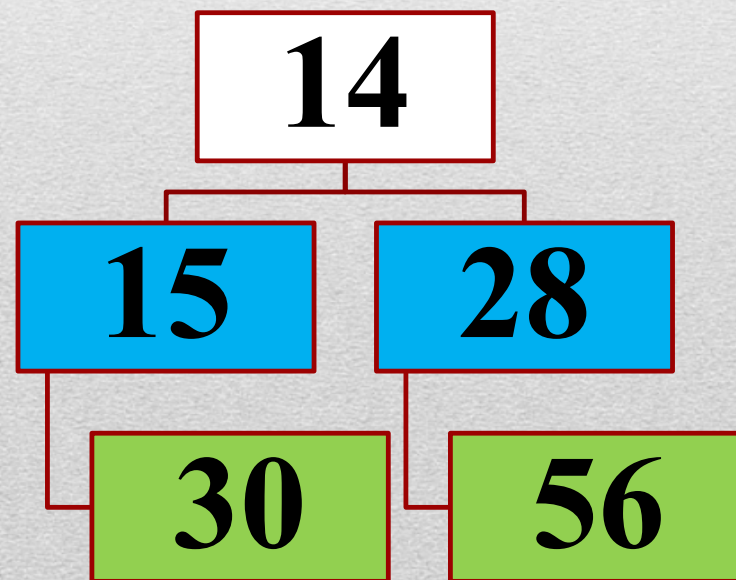
## Задание 1

б) Укажите такое значение  $S$ , при котором Петя не может выиграть за один ход, но при любом ходе Пети Ваня может выиграть своим первым ходом. опишите выигрышную стратегию Вани.

*$S = 14$  – выигрывает Ваня первым ходом*

Петя

Ваня



# Задача 26.1

Количество  
камней  $S$   
 $1 \leq S \leq 28$

Петя

+1

\*2

$\geq 29$

## Задание 2

Укажите два таких значения  $S$ , при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причем одновременно выполняются два условия:  
— Петя не может выиграть за один ход;  
— Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.  
Для указанных значений  $S$  опишите выигрышную стратегию Пети.

## **Что мы знаем?**

$15 \leq S \leq 28$  – выигрывает Петя  
первым ходом

$S = 14$  – выигрывает Ваня  
первым ходом

# Задача 26.1

## **Что мы знаем?**

$15 \leq S \leq 28$  –

*выигрывает Петя  
первым ходом*

$S = 14$  –

*выигрывает Ваня  
первым ходом*

## **Запоминаем!**

$15 \leq S \leq 28$  –

*выигрышная  
позиция с первого  
хода*

$S = 14$  –

*проигрышная  
позиция*

Количество  
камней  $S$   
 $1 \leq S \leq 28$

Петя

+1

\*2

$\geq 29$

# Задача 26.1

Задание 2

Петя хочет выиграть вторым ходом!

**Что мы знаем?**

$S = 14$  – проигрышная позиция

**Какие операции определены?**

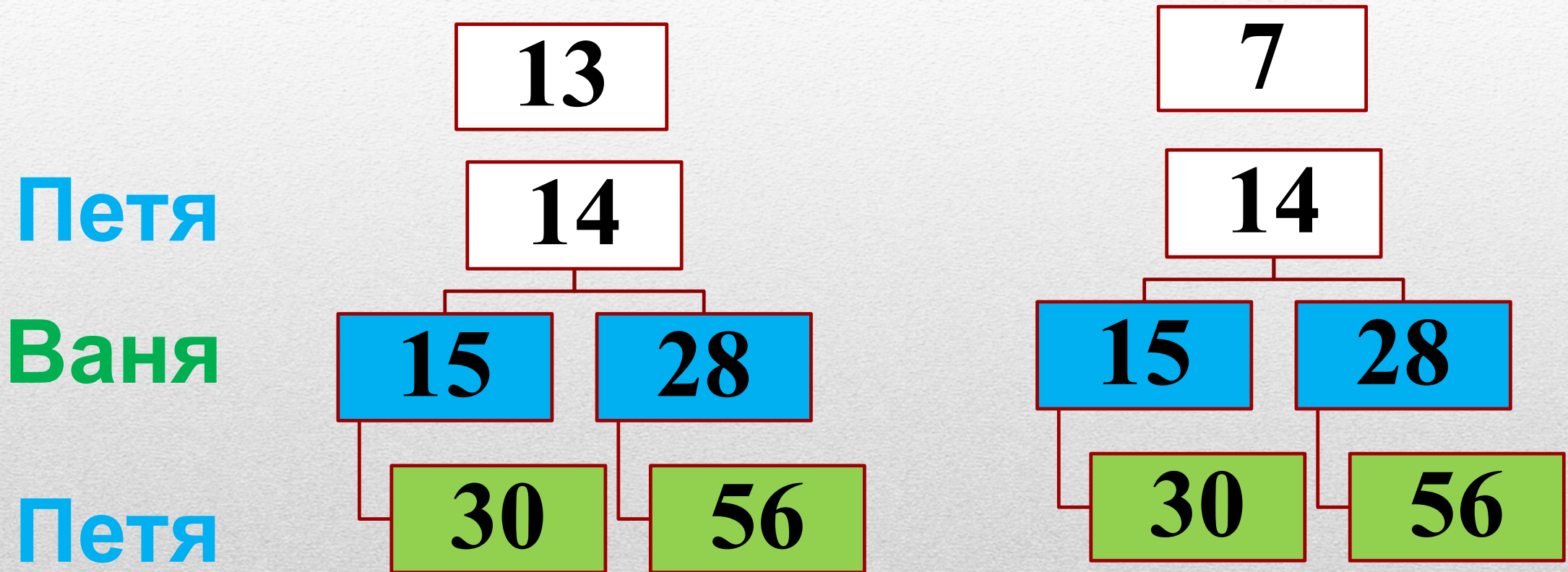
Петя

Ваня

14

# Задача 26.1

## Задание 2



$S = 14$  – проигрышная позиция (см. п. 1 б)

Ответ:  $S = 7$ , 13 выигрывает Петя вторым ходом

# Задача 26.1

Количество  
камней  $S$   
 $1 \leq S \leq 28$

Петя

+1

\*2

$\geq 29$

## Задание 3

Укажите значение  $S$ , при котором одновременно выполняются два условия:

— у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;

— у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

Для указанного значения  $S$  опишите выигрышную стратегию Вани. Постройте дерево всех партий, возможных при этой выигрышной стратегии (в виде рисунка или таблицы).

## **Что мы знаем?**

$15 \leq S \leq 28$  – выигрышная позиция с первого хода

$S = 14$  – проигрышная позиция

$S = 7, 13$  выигрышная позиция со второго хода

# Задача 26.1

Задание 3

Количество  
камней  $S$   
 $1 \leq S \leq 28$

Петя

+1

\*2

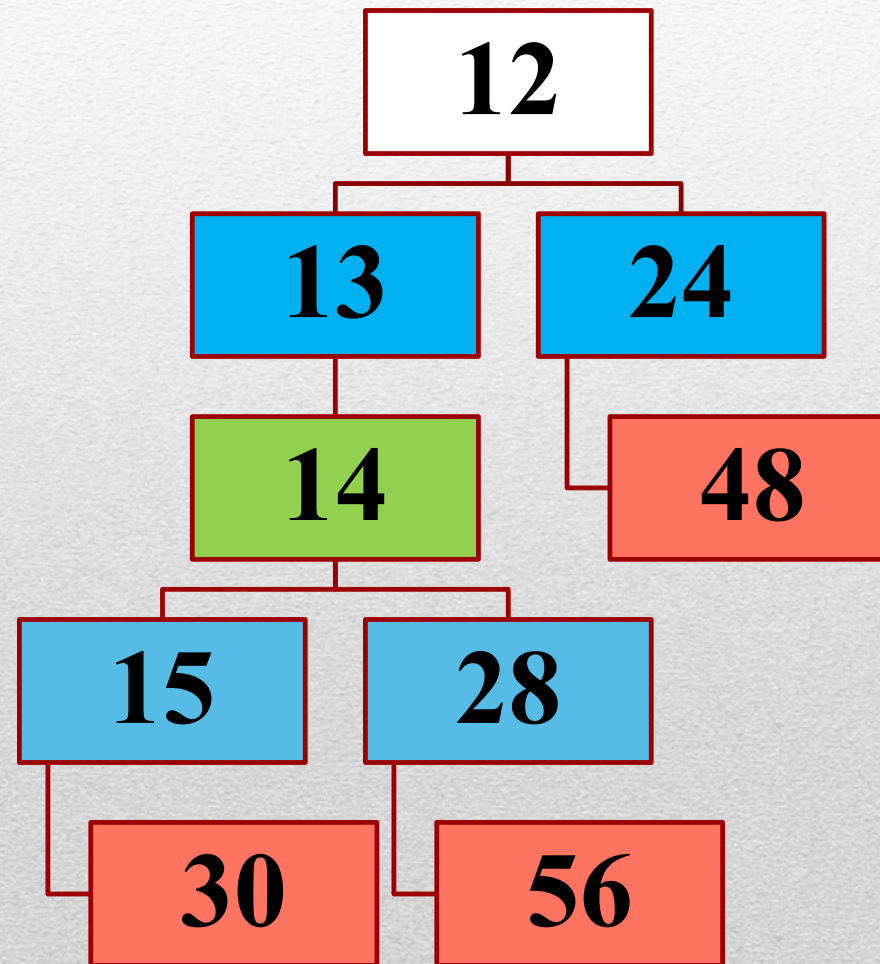
$\geq 29$

Петя

Ваня

Петя

Ваня





# Задача 26.2

Два игрока, Паша и Валя, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Паша. За один ход игрок может добавить в кучу один камень или увеличить количество камней в куче в два раза. Например, имея кучу из 7 камней, за один ход можно получить кучу из 14 или 8 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней.

Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 16. Если при этом в куче оказалось не более 22 камней, то победителем считается игрок, сделавший последний ход. В противном случае победителем становится его противник. Например, если в куче было 15 камней и Паша удвоит количество камней в куче, то игра закончится и победителем будет Валя.

В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 15$ .

Будем говорить, что игрок имеет выигрышную стратегию, если он может выиграть при любых ходах противника. Описать стратегию игрока — значит описать, какой ход он должен сделать в любой ситуации, которая ему может встретиться при различной игре противника.



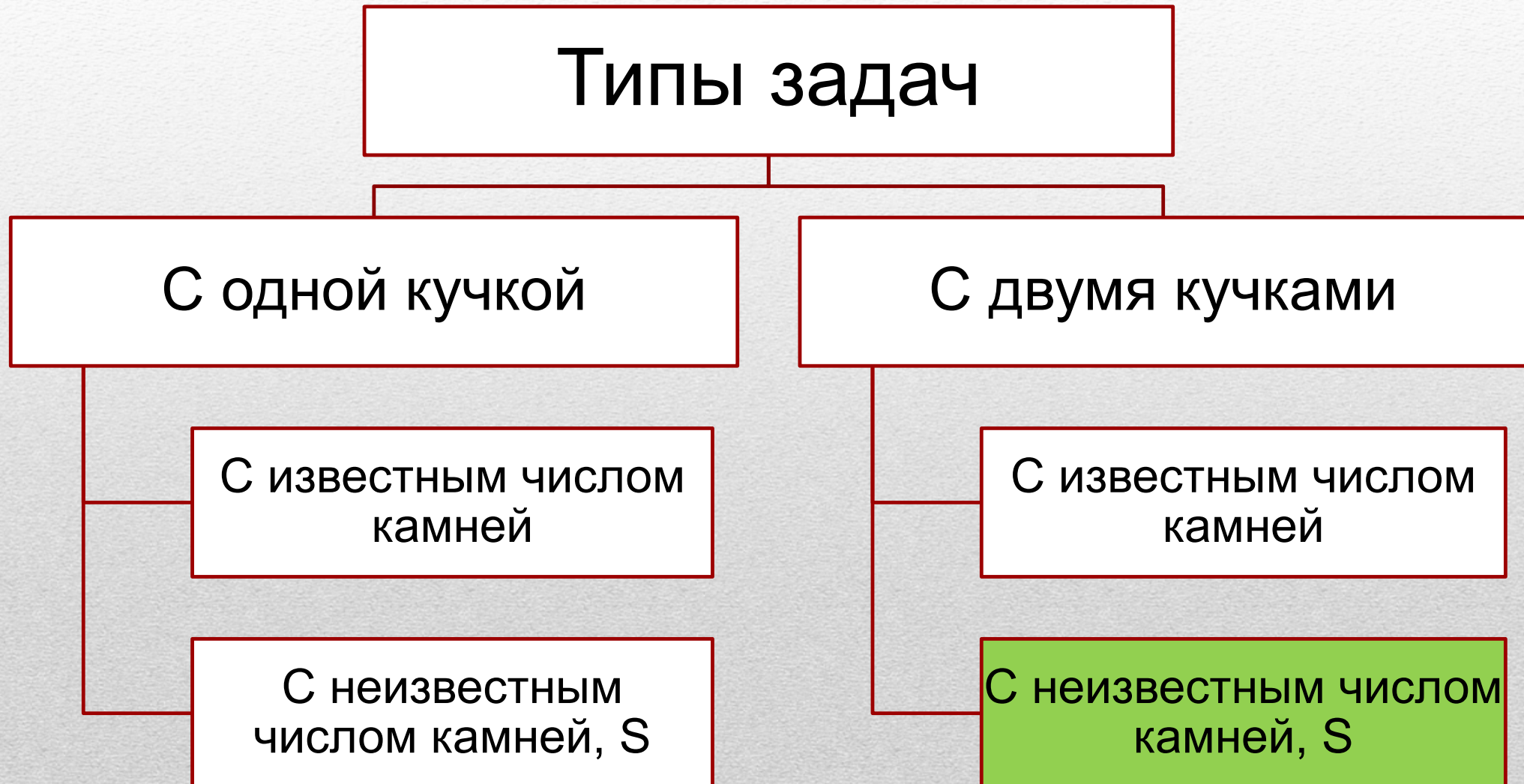
Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 16.



Если при этом в куче оказалось не более 22 камней, то победителем считается игрок, сделавший последний ход. В противном случае победителем становится его противник.

Например, если в куче было 15 камней и Паша удвоит количество камней в куче, то игра закончится и победителем будет Валя.

# Задача № 26



# Задача 26.2

Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежат **две кучи камней**. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может **добавить** в одну из куч (по своему выбору) **один камень** или увеличить количество камней в куче **в три раза**.

*Например, пусть в одной куче 10 камней, а в другой 7 камней; такую позицию в игре будем обозначать  $(10, 7)$ . Тогда за один ход можно получить любую из четырёх позиций:  $(11, 7)$ ,  $(30, 7)$ ,  $(10, 8)$ ,  $(10, 21)$ .*

Для того чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 68. Победителем считается игрок, сделавший **последний ход**, т.е. первым получивший такую позицию, при которой в кучах будет 68 или больше камней. В начальный момент в первой куче было шесть камней, во второй куче –  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 61$ .



$(6, S)$   
 $1 \leq S \leq 61$

Петя

+1

\*3

### Задание 1

а) Укажите все такие значения числа  $S$ , при которых Петя может выиграть за один ход.

б) Известно, что Ваня выиграл своим первым ходом после неудачного первого хода Пети. Укажите минимальное значение  $S$ , когда такая ситуация возможна.



суммарное количество  
камней в кучах  
становится не менее 68  
 $\geq 68$



$(6, S)$   
 $1 \leq S \leq 61$

Петя

+1

\*3



$\geq 68$



**Задание 2** Укажите такое значение  $S$ , при котором у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня. Для указанного значения  $S$  опишите выигрышную стратегию Пети.

**Что мы знаем?**

$21 \leq S \leq 61$  – выигрышная позиция с первого хода  
 $(6, 21), (6, 22), (6, 23), \dots$



$(6, S)$   
 $1 \leq S \leq 61$

Петя

+1

\*3



$\geq 68$



Петя хочет выиграть  
СВОИМ ВТОРЫМ ХОДОМ

**Строим дерево**

$S = 20$

$(6, 20)$



$(6, S)$   
 $1 \leq S \leq 61$

Петя

+1

\*3

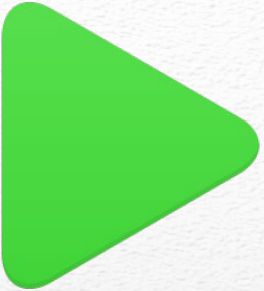
**Задание 3** Укажите значение  $S$ , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.



**суммарное** количество  
камней в кучах  
становится не менее 68  
 $\geq 68$





(6, S)  
 $1 \leq S \leq 61$

Петя

+1

\*3

### Задание 3

## Строим дерево

$$S = 19$$

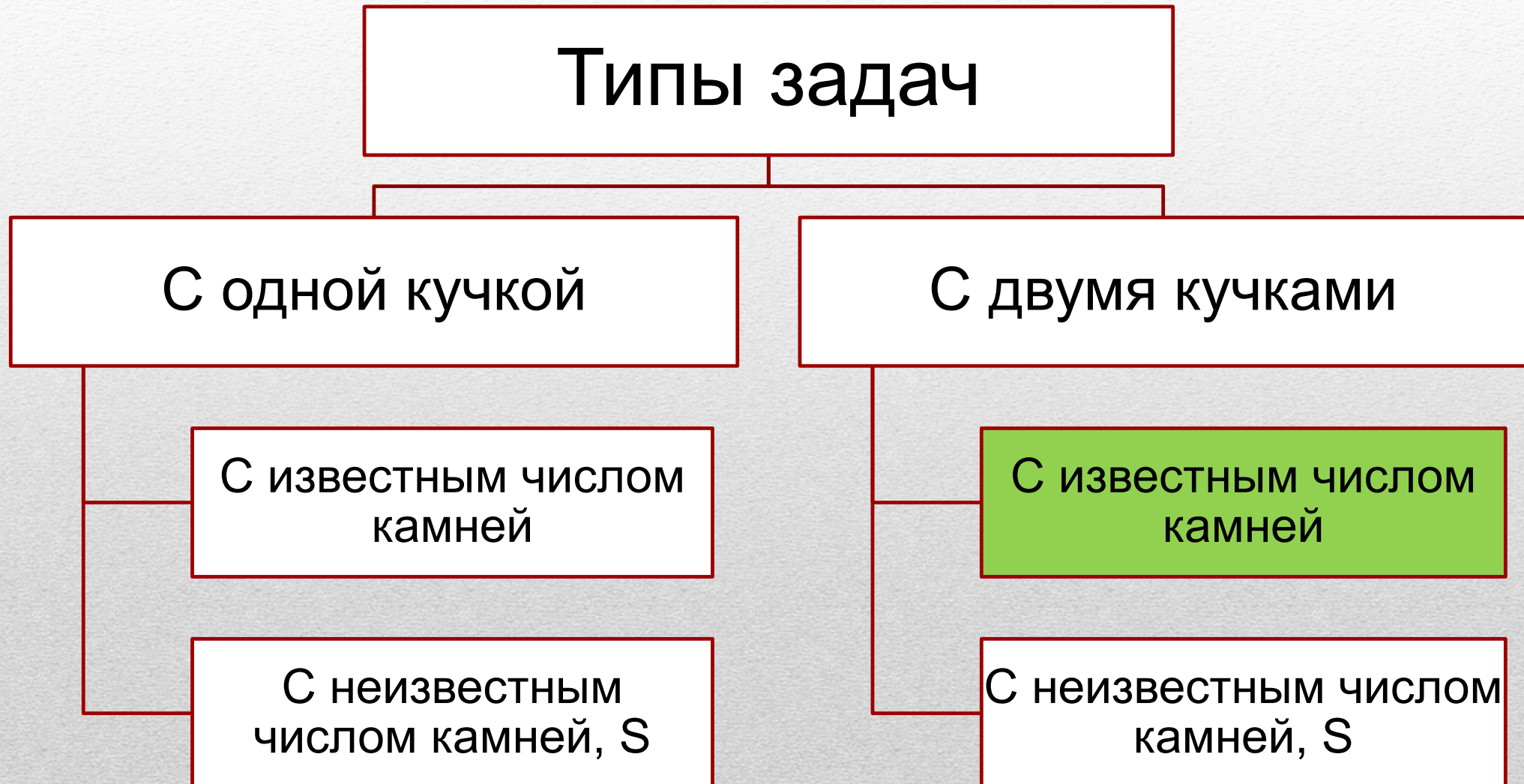
$$(6, 19)$$



$\geq 68$



# Задача № 26



# Задача № 26

Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) **один** камень или увеличить количество камней в куче в **два раза**. Например, пусть в одной куче 10 камней, а в другой 7 камней; такую позицию в игре будем обозначать  $(10, 7)$ . Тогда за один ход можно получить любую из четырёх позиций:  $(11, 7)$ ,  $(20, 7)$ ,  $(10, 8)$ ,  $(10, 14)$ . Для того чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней.

Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 77. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, что в кучах всего будет 77 или больше камней.

Будем говорить, что игрок имеет *выигрышную стратегию*, если он может выиграть при любых ходах противника. Описать стратегию игрока – значит описать, какой ход он должен сделать в любой ситуации, которая ему может встретиться при различной игре противника. Например, при начальных позициях  $(6, 36)$ ,  $(7, 35)$ ,  $(9, 34)$  выигрышная стратегия есть у Пети. Чтобы выиграть, ему достаточно удвоить количество камней во второй куч

# Задача № 26

**Задание 1.** Для каждой из начальных позиций  $(6, 35)$ ,  $(8, 34)$  укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию. В каждом случае опишите выигрышную стратегию; объясните, почему эта стратегия ведёт к выигрышу, и укажите, какое наибольшее количество ходов может потребоваться победителю для выигрыша при этой стратегии.

**Задание 2.** Для каждой из начальных позиций  $(6, 34)$ ,  $(7, 34)$ ,  $(8, 33)$  укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию. В каждом случае опишите выигрышную стратегию; объясните, почему эта стратегия ведёт к выигрышу, и укажите, какое наибольшее количество ходов может потребоваться победителю для выигрыша при этой стратегии.

**Задание 3.** Для начальной позиции  $(7, 33)$  укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию. Опишите выигрышную стратегию; объясните, почему эта стратегия ведёт к выигрышу, и укажите, какое наибольшее количество ходов может потребоваться победителю для выигрыша при этой стратегии. Постройте дерево всех партий, возможных при указанной Вами выигрышной стратегии. Представьте дерево в виде рисунка или таблицы.

# Оформление

Оформление на примере анализа реального бланка

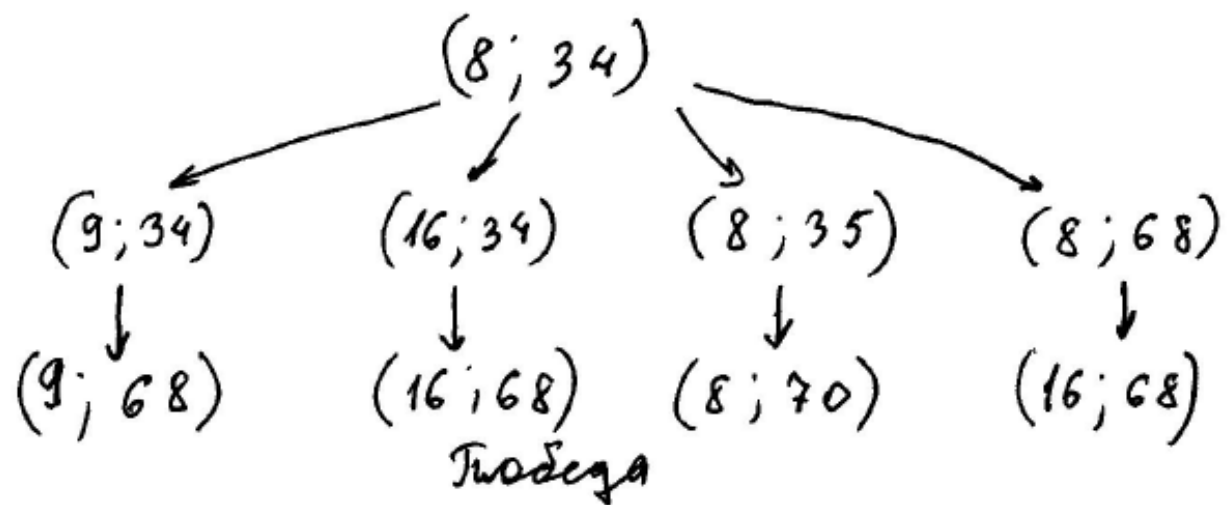
№ 26

Задача 1.

нач. кол-во камней  
ход Петра  
кон. кол-во камней  
ход ~~Вани~~ Вани  
кон. кол-во камней

подсказка

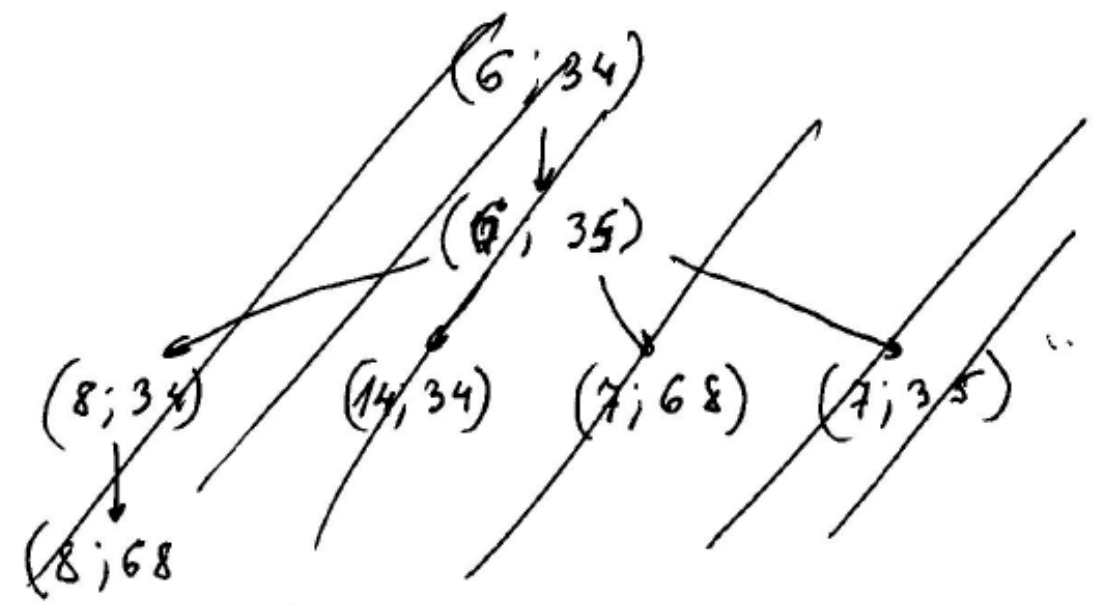
Ответ. Выигрывающую стратегию имеет Ваня, кол-во ходов: 1.

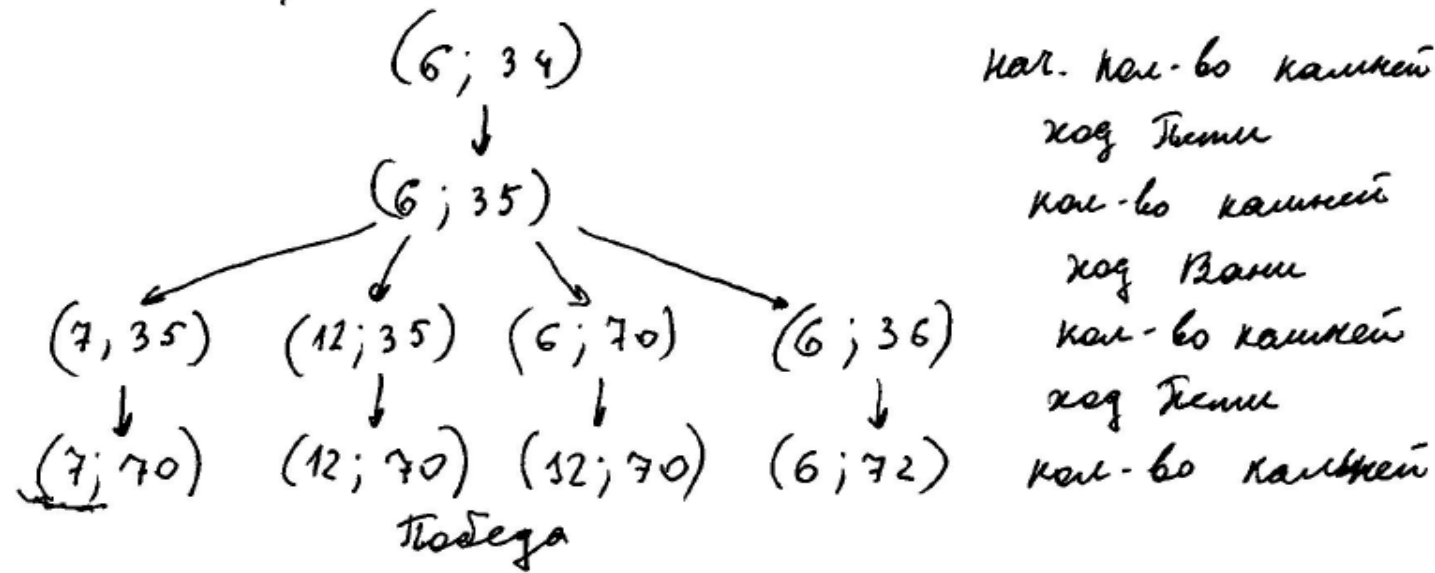


ход Паши  
 кол-во камней  
 ход Васьки  
 кол-во камней

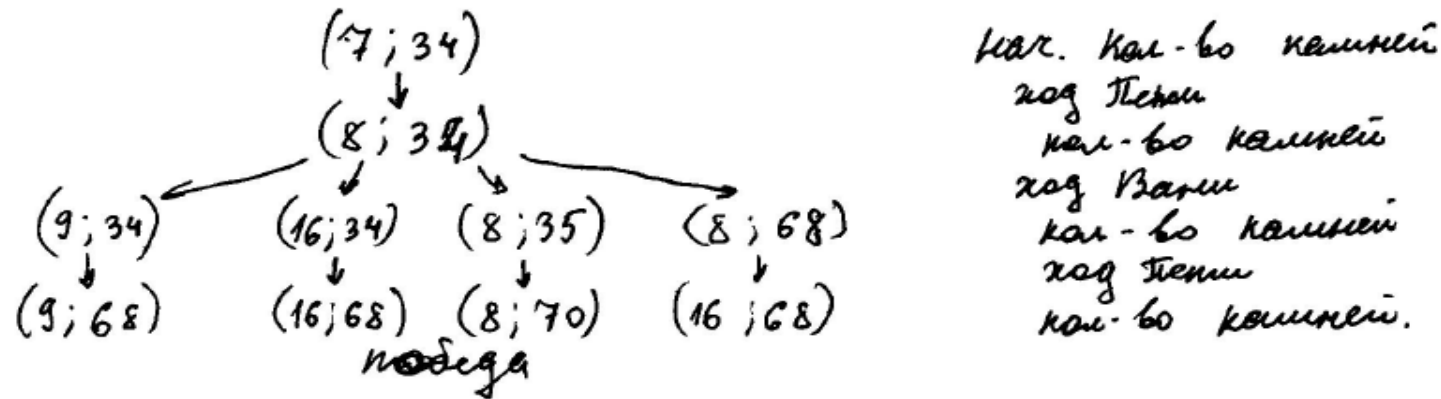
Ответ: Выигрышную стратегию имеет Васа, кол-во ходов: 8.

Задача 2

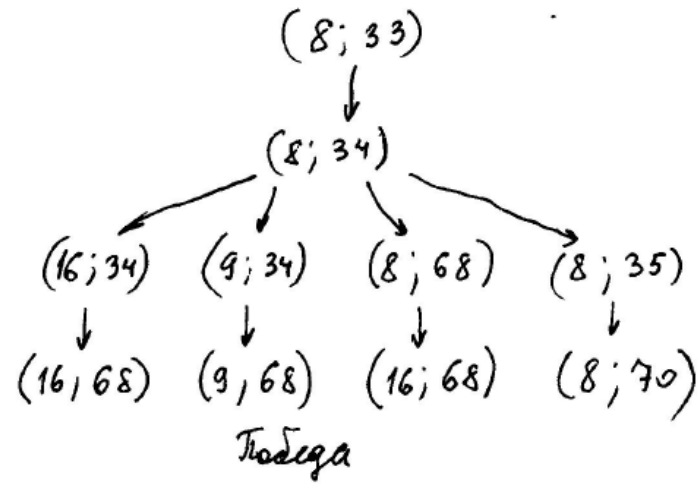




Ответ: выигрышную стратегию имеет Петя; кол-во ходов: 2.

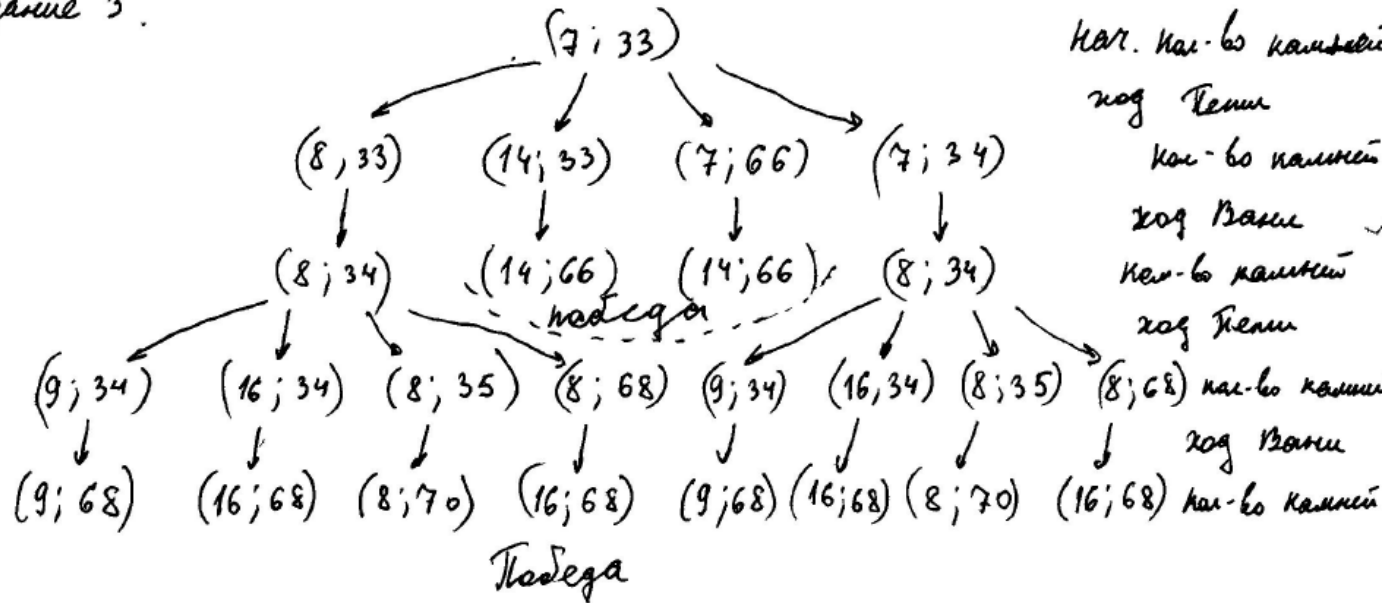


Ответ: выигрышную стратегию имеет Петя; кол-во ходов: 2.



кар. кар-во камней  
 ход Петя  
 кар-во камней  
 ход Ваня  
 кар-во камней  
 ход Петя  
 кар-во камней

Ответ: выигрышно стратегия имеет Петя; кар-во : ходов : 2  
 Задача 3.



кар. кар-во камней  
 ход Петя  
 кар-во камней  
 ход Ваня  
 кар-во камней  
 ход Петя  
 кар-во камней  
 ход Ваня  
 кар-во камней

Ответ: выигрышно стратегия имеет Ваня. кар-во : ходов : 2