Департамент образования и науки города Москвы
Государственное автономное образовательное учреждение высшего образования города Москвы
«Московский городской педагогический университет»
Институт цифрового образования

«УТВЕРЖДАЮ»

Первый проректор

_______________ **Е.Н. Геворкян**

«___»_______________ 2022 года

ПРОГРАММА

вступительных испытаний в аспирантуру
Группа научных специальностей
1.1. Математика и механика

Научная специальность
1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

Москва, 2022

Авторы-составители:

профессор департамента математики и физики ИЦО МГПУ, профессор, доктор физико-математических наук Пчелинцев С.В.;

доцент департамента математики и физики ИЦО МГПУ, доцент, кандидат физико-математических наук Бажанова Е.Н.

Программа вступительных испытаний в аспирантуру по специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика утверждена на заседании департамента математики и физики института цифрового образования ГАОУ ВО МГПУ «21» февраля 2022 г., протокол № 6.

Программа утверждена ученым советом института цифрового образования ГАОУ ВО МГПУ «16» марта 2022 г., протокол № 8.

Начальник департамента
математики и физики Семеняченко Ю.А.

Директор института
цифрового образования Лавренова Е.В.

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Настоящая программа составлена на основе требований к обязательному минимуму содержания и уровню подготовки выпускника магистратуры по направлению «Педагогическое образование», профилю «Математическое образование», определяемых Федеральным государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования по направлению «Педагогическое образование», а также федеральных государственных требований к структуре программ подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре (адъюнктуре), условиям их реализации, срокам освоения этих программ с учетом различных форм обучения, образовательных технологий и особенностей отдельных категорий аспирантов, утвержденных приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации от 30 октября 2021 г. № 951.

Прием в ГАОУ ВО МГПУ для освоения программы аспирантуры по специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (отрасли науки – физико-математические) осуществляется на конкурсной основе по результатам устного экзамена.

Вступительный экзамен в аспирантуру по научной специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика является одной из традиционных форм аттестации уровня научно-исследовательской подготовки, поступающих в аспирантуру. К вступительным испытаниям допускаются лица, имеющие образование не ниже высшего образования (специалитет или магистратура).

Целью проведения вступительного экзамена в аспирантуру является определение фундаментальных математических знаний, навыков профессионального мышления, способности к самостоятельному мышлению, умения применять практические знания для решения практических задач. Структурно содержание экзамена представлено пятью разделами:

математическая логика, алгебра и теория чисел, математический анализ, геометрия и дискретная математика. Результаты вступительных испытаний оцениваются по 100-балльной шкале.

Программа обобщает многолетний опыт проведения вступительных испытаний в аспирантуру как в МГПУ, так и в другие педагогические вузы по специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (01.01.06 Математическая логика, алгебра и теория чисел до 24.02.2021 г.).

СОДЕРЖАНИЕ ПРОГРАММЫ

Настоящая программа состоит из пояснительной записки; примерных вопросов вступительного испытания по научной специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика; критериев оценки и рекомендуемой литературы.

Программа содержит перечень необходимых квалификационных требований к усвоению содержания профильных математических дисциплин: математическая логика, алгебра, теория чисел, математический анализ, геометрия и дискретная математика. Материал программы разделен на пять тематических разделов, в которых перечислены соответствующие укрупненные дидактические единицы, достаточный уровень владения которыми будущий аспирант должен продемонстрировать во время сдачи вступительного экзамена по указанной специальности.

Раздел 1. Математическая логика

Алгебра высказываний. Алгебра высказываний. Полные системы связок алгебры высказываний.

Булевы функции. Булевы функции. Представление булевой функции формулой алгебры высказываний. Полная система булевых функций.

Логика предикатов. Предикаты. Операции над предикатами. Кванторы общности и существования. Логическое следствие.

Формализованное исчисление высказываний. Понятие формальной теории. Теорема дедукции. Теорема о полноте в теории. Непротиворечивость теории. Независимость системы аксиом теории.

Формализованное исчисление предикатов. Формальная арифметика. Теорема Геделя о неполноте (без доказательства).

Раздел 2. Алгебра и теория чисел

Группы. Циклические группы, их подгруппы и гомоморфные образы. Группа подстановок и ее подгруппы.

Кольца и поля. Кольца и поля; примеры и простейшие свойства элементов.

Векторные пространства. Базис и размерность векторного пространства. Собственные векторы и собственные значения.

Системы линейных уравнений. Основные теоремы о системах линейных уравнений.

Полиномы от одной переменной. Разложение многочленов в произведение неприводимых нормированных множителей над полями **C** и **R**. Теорема о строении простого алгебраического расширения.

Теория делимости. Арифметические функции: число делителей $\tau(n)$, сумма делителей $\sigma(n)$, функция Эйлера $\varphi(n)$. Алгоритм Евклида и его применения (НОД, НОК целых чисел и многочленов над полем). Линейное представление НОД.

Теория сравнений. Сравнения и их свойства. Кольцо классов вычетов по модулю m. Теоремы Эйлера и Ферма.

Раздел 3. Математический анализ

Предел функции. Бесконечно малые и бесконечно большие функции: определение и свойства. Предел функции одной переменной на бесконечности и в точке: различные определения, геометрический смысл, свойства.

Дифференциальное исчисление функции одной переменной. Дифференцируемость, производная, дифференциал функции одной переменной. Геометрический и физический смысл производной. Связь между непрерывностью и дифференцируемостью.

Интеграл. Первообразная, неопределенный и определенный интегралы. Интегрируемость непрерывных функций. Формула Ньютона-Лейбница.

Числовые ряды. Основные понятия, связанные с числовыми рядами. Признаки сходимости числовых рядов.

Дифференциальное исчисление функции многих переменных. Дифференцируемость, частные производные функций нескольких переменных. Экстремум функции двух переменных.

Раздел 4. Геометрия

Векторы и их свойства. Векторы на плоскости и в пространстве. Линейные операции над векторами, координаты векторов. Скалярное, векторное и смешанное произведение векторов. Применение свойств векторов к решению задач элементарной геометрии.

Геометрические преобразования. Подобия плоскости и их свойства. Классификация подобий. Группа подобий и ее подгруппы. Применение подобий к решению задач элементарной геометрии.

Основания геометрии. Проблема пятого постулата. Теоремы Лежандра. Связь аксиомы параллельности с суммой углов треугольника. Аксиоматика Гильберта 3-мерного евклидова пространства.

Проективная геометрия. Двойное отношение точек и прямых на проективной плоскости. Гармонические свойства полного четырехвершинника. Приложения гармонических свойств полного четырехвершинника к задачам элементарной геометрии. Проективные преобразования и их свойства. Проективно-эквивалентные фигуры.

Раздел 5. Дискретная математика

Графы. Метрические характеристики графов. Специальные виды графов (Эйлеровы, Гамильтоновы).

Комбинаторика. Основные комбинаторные соединения. Бином Ньютона. Полиноминальная теорема. Рекуррентные соотношения.

В целом, содержание программы соответствует предметному содержанию государственных аттестационных экзаменов по математике для выпускников бакалавриата и магистратуры по профилю «Математика» направления «Педагогическое образование». Существенным отличием здесь является уменьшение общего количества экзаменационных вопросов, концентрация на фундаментальных аспектах и, вместе с этим, одновременное увеличение объема предметного наполнения каждого из них.

ПРИМЕРНЫЕ ВОПРОСЫ ВСТУПИТЕЛЬНОГО ИСПЫТАНИЯ

1. Алгебра высказываний. Полные системы связок алгебры высказываний.
2. Булевы функции. Представление булевой функции формулой алгебры высказываний. Полная система булевых функций.
3. Предикаты. Операции над предикатами. Кванторы общности и существования. Логическое следствие.
4. Понятие формальной теории. Теорема дедукции. Теорема о полноте в теории. Непротиворечивость теории. Независимость системы аксиом теории.
5. Формальная арифметика. Теорема Геделя о неполноте (без доказательства).
6. Основные теоремы о системах линейных уравнений.
7. Базис и размерность векторного пространства.
8. Циклические группы, их подгруппы и гомоморфные образы.
9. Группа подстановок и ее подгруппы.

10. Собственные векторы и собственные значения.

11. Разложение многочленов в произведение неприводимых нормированных множителей над полями **C** и **R**.

12. Теорема о строении простого алгебраического расширения.

13. Арифметические функции: число делителей $\tau(n)$, сумма делителей $\sigma(n)$, функция Эйлера $\varphi(n)$.

14. Алгоритм Евклида и его применения (НОД, НОК целых чисел и многочленов над полем). Линейное представление НОД.

15. Сравнения и их свойства. Кольцо классов вычетов по модулю m. Теоремы Эйлера и Ферма.

16. Бесконечно малые и бесконечно большие функции: определение и свойства. Предел функции одной переменной на бесконечности и в точке: различные определения, геометрический смысл, свойства.

17. Дифференцируемость, производная, дифференциал функции одной переменной. Геометрический и физический смысл производной. Связь между непрерывностью и дифференцируемостью.

18. Первообразная, неопределенный и определенный интегралы. Интегрируемость непрерывных функций. Формула Ньютона-Лейбница.

19. Основные понятия, связанные с числовыми рядами. Признаки сходимости числовых рядов.

20. Дифференцируемость, частные производные функций нескольких переменных. Экстремум функции двух переменных.

21. Векторы на плоскости и в пространстве. Линейные операции над векторами, координаты векторов. Скалярное, векторное и смешанное произведение векторов. Применение свойств векторов к решению задач элементарной геометрии.

22. Подобия плоскости и их свойства. Классификация подобий. Группа подобий и ее подгруппы. Применение подобий к решению задач элементарной геометрии.

23. Проблема пятого постулата. Теоремы Лежандра. Связь аксиомы

параллельности с суммой углов треугольника.

24. Двойное отношение точек и прямых на проективной плоскости. Гармонические свойства полного четырехвершинника. Приложения гармонических свойств полного четырехвершинника к задачам элементарной геометрии. Проективные преобразования и их свойства. Проективно-эквивалентные фигуры.

25. Аксиоматика Гильберта 3-мерного евклидова пространства.

26. Метрические характеристики графов.

27. Специальные виды графов (эйлеровы, гамильтоновы).

28. Основные комбинаторные соединения.

29. Бином Ньютона. Полиноминальная теорема.

30. Рекуррентные соотношения.

КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ

81 – 100 баллов (= "отлично"):

– все вопросы билета раскрыты полностью;

– студент владеет основными теориями и глубоко понимает их содержание;

– имеет ясное представление связи теории и практики в рамках излагаемого материала;

– уверенно владеет необходимыми методами решения конкретных задач, может проиллюстрировать основные положения теории конкретными примерами;

– ясно и четко дает основные определения. Владеет терминологическим и понятийным аппаратом;

– развернуто отвечает на дополнительные вопросы.

66 – 80 баллов (="хорошо"):

– вопросы билета раскрыты по существу;

– студент в целом владеет основными теориями и понимает их содержание;

– имеет общее представление о связи теории и практики в рамках излагаемого материала;

– владеет в целом необходимыми методами решения конкретных задач, может проиллюстрировать основные положения теории конкретными примерами;

– в достаточной мере владеет понятийным и терминологическим аппаратом;

– имеет затруднения при ответе на дополнительные вопросы.

51 – 65 баллов (= “удовлетворительно”):

– вопросы билета раскрыты, но не полностью;

– фрагментарное понимание основных теорий;

– слабое понимание связи теории и практики;

– студент может проиллюстрировать основные положения теории конкретными примерами, но имеет затруднения при решении некоторых задач;

– студент не демонстрирует уверенного владения понятийным и терминологическим аппаратом;

– дополнительные вопросы вызывают затруднение.

0 – 50 баллов (= “неудовлетворительно”):

– большая часть вопросов не раскрыта;

– студент не может проиллюстрировать основные положения теории конкретными примерами, не может применить теорию при решении конкретных задач;

– нет ответов на дополнительные вопросы.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Кострикин А. И. Введение в алгебру: В 3-х ч. Ч. I-II / А. И. Кострикин. – М.: МЦНМО, 2020. – 271 с.

2. Куликов Л. Я. Алгебра и теория чисел / Л. Я. Куликов. – М.: Высшая школа, 1979 – 559 с.

3. Винберг Э.Б. Курс алгебры. М.: МЦНМО, 2013 г. – 590 с.

4. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре: учебное пособие / Д.К. Фаддеев – СПб.: Лань, 2020. – 416 с.

5. Мендельсон Э. Введение в математическую логику / Э. Мендельсон – М.: Наука, 1971. – 320 с.

6. Игошин В.И. Математическая логика и теория алгоритмов / В. И. Игошин. – М.: Академия, 2008. – 448 с.

7. Нестеренко Ю.В. Теория чисел / Ю.В. Нестеренко – М.: Академия, 2008. – 265 с.

8. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3-х т. / Г.М. Фихтенгольц. – СПб.: Лань, 2009-2017.

9. Шипачев В.С. Высшая математика / В.С. Шипачев – М.: Высшая школа, 1998. – 479 с.

10. Мордкович А.Г., Солодовников А.С. Математический анализ / А.Г. Мордкович, А.С. Солодовников. – М.: Высшая школа, 1990. – 419 с.

11. Атанасян Л.С., Базылев В.Т. Геометрия: В 2-х ч. / Л.С. Атанасян, В.Т. Базылев. – М.: Просвещение, 1986-1987.

12. Погорелов А.В. Геометрия / А.В. Погорелов. – М.: Наука, 1983. – 288 с.

13. Деза Е.И., Модель Д.Л. Основы дискретной математики: учеб. пособие для студентов высш. учеб. заведений / Е. И. Деза, Д. Л. Модель. – М.: URSS, 2011. – 218 с.

14. Андерсон Д.А. Дискретная математика и комбинаторика / Джеймс А. Андерсон. – М.; СПб; Киев; Вильямс, 2004. – 957 с.

15. Романовский И.В. Дискретный анализ: учеб. пособие по приклад. математике и информатике / И. В. Романовский. – М.: Физматлит; СПб.: Невский Диалект : Лаб. Базовых Знаний, 2001. – 237 с.