

Оценка предметных КОМПЕТЕНЦИЙ

Разбор контрольно-измерительных материалов по математике, используемых в процедуре ЕГЭ в 2022 году

М.А.Черняева, почетный работник общего образования РФ, заместитель председателя предметной комиссии ЕГЭ по математике, ведущий эксперт ГАОУ ДПО МЦКО



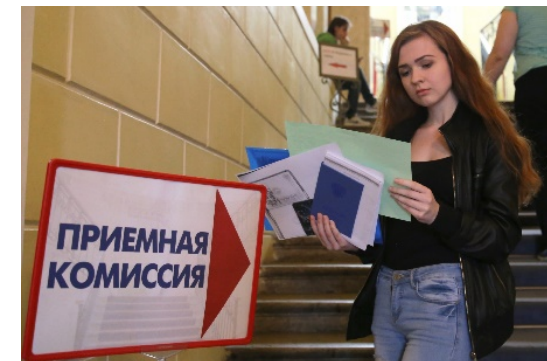
МОСКОВСКИЙ ЦЕНТР
СЕРТИФИКАЦИИ КВАЛИФИКАЦИЙ
В ОБРАЗОВАНИИ

Разбор контрольно-измерительных материалов по математике, используемых в процедуре ЕГЭ в 2022 году

Обязательный предмет
для получения
аттестата о среднем
общем образовании

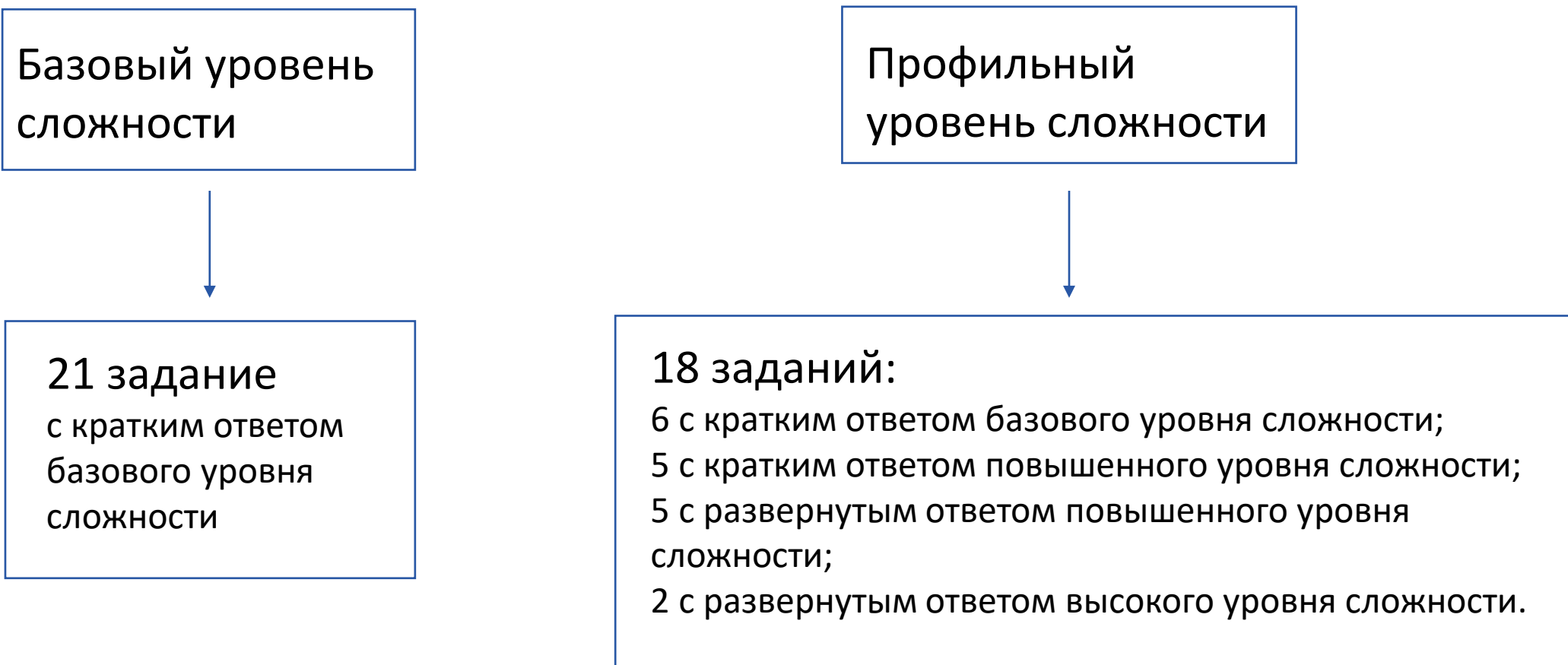


профильный уровень
базовый уровень



Результаты ЕГЭ
востребованы
для поступления
не во все вузы

Структура экзаменационной работы



Разбор контрольно-измерительных материалов по математике,
используемых в процедуре ЕГЭ в 2022 году

Содержание контрольно-измерительных материалов ЕГЭ по математике

- практико-ориентированные задачи;
- задания по алгебре за курс средней школы;
- задания по геометрии за курс средней школы;
- задания по началам математического анализа;
- задание по теории вероятностей и статистике.

Разбор контрольно-измерительных материалов по математике, используемых в процедуре ЕГЭ в 2022 году

№ п/п	№ задания	Тема задания	Максимальный балл
1	2	Простейшие текстовые задачи	1
2	3	Размеры и единицы измерения	1
3	4	Чтение графиков и диаграмм	1
4	5	Задачи на квадратной решетке	1
5	6	Простейшие текстовые задачи	1
6	8	Задачи с прикладным содержанием	1
7	10	Прикладная геометрия	1
8	11	Начала теории вероятностей	1
9	12	Выбор оптимального варианта	1
10	13	Прикладная геометрия (стереометрия)	1
11	18	Анализ утверждений	1
12	20	Текстовые задачи	1

Разбор контрольно-измерительных материалов по математике, используемых в процедуре ЕГЭ в 2022 году

Типы простейших текстовых задач по алгебре:

- округление с недостатком;
- округление с избытком;
- оплата покупки и сдача;
- оплата электроэнергии, телефона, интернета;
- проценты и части;
- выбор оптимального варианта, комплекта;
- чтение информации, заданной таблицей или диаграммой.

Умения:

- моделировать реальные ситуации на языке математики;
- исследовать построенные модели, составлять числовые выражения по условию задачи;
- исследовать построенные модели с использованием математического аппарата.

Разбор контрольно-измерительных материалов по математике,
используемых в процедуре ЕГЭ в 2022 году

Математическая грамотность.

Смысловое чтение условия задачи.

Проживание ситуации, представленной в задаче: задача про вас,
для вас, вы непосредственный участник той ситуации, которая
описывается в задаче.

Разбор контрольно-измерительных материалов по математике, используемых в процедуре ЕГЭ в 2022 году

Задание №3. Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ	ВОЗМОЖНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ
А) объём ящика с яблоками	1) 108 л
Б) объём воды в озере Ханка	2) 900 м ³
В) объём бутылки соевого соуса	3) 0,2 л
Г) объём бассейна в спорткомплексе	4) 18,3 км ³

Запишите в ответ цифры, расположив их в порядке, соответствующем буквам:

А	Б	В	Г

Разбор контрольно-измерительных материалов по математике, используемых в процедуре ЕГЭ в 2022 году

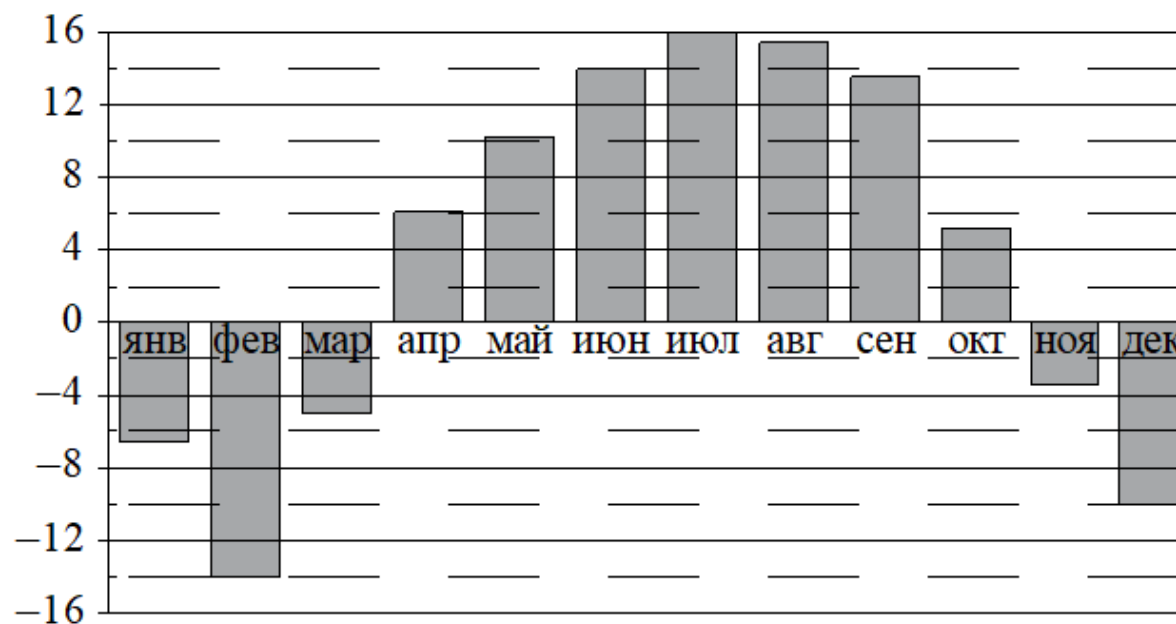
Задание №12. В таблице приведены данные о шести сумках.

Номер сумки	Длина (см)	Высота (см)	Ширина (см)	Масса (кг)
1	52	38	18	5,5
2	65	47	26	11,2
3	55	36	24	8,7
4	42	31	16	4,6
5	58	40	20	9,3
6	49	37	19	10,1

По правилам авиакомпании в ручную кладь может быть взята сумка, размеры которой не превышают 55 см в длину, 40 см в высоту, 20 см в ширину и масса которой не превышает 10 кг. Какие сумки можно взять в ручную кладь по правилам этой авиакомпании? В ответе укажите номера выбранных сумок без пробелов, запятых и других дополнительных символов. *Перечисляйте в порядке возрастания номеров.*

Разбор контрольно-измерительных материалов по математике, используемых в процедуре ЕГЭ в 2022 году

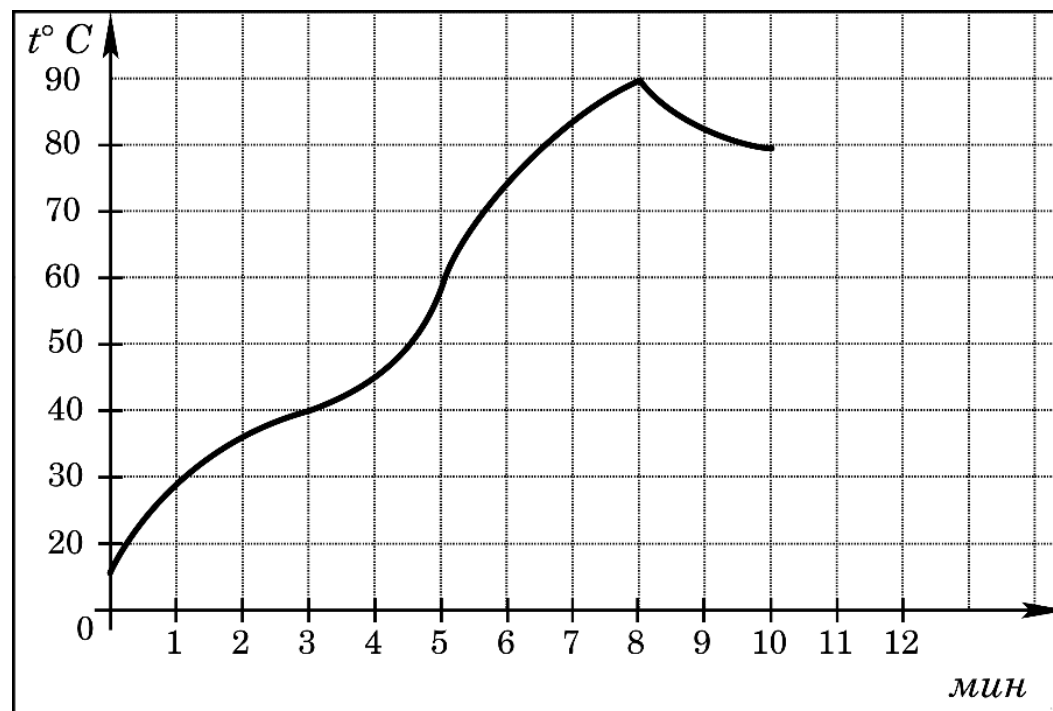
Задание 4. На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Нижнем Новгороде за каждый месяц 1994 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали – температура в градусах Цельсия.



Определите по диаграмме наименьшую среднемесячную температуру во второй половине 1994 года в Нижнем Новгороде. Ответ дайте в градусах Цельсия.

Разбор контрольно-измерительных материалов по математике, используемых в процедуре ЕГЭ в 2022 году

Задание №4. На графике показан процесс разогрева двигателя легкового автомобиля. На оси абсцисс откладывается время в минутах, прошедшее от запуска двигателя, на оси ординат — температура двигателя в градусах Цельсия. Определите по графику, сколько минут двигатель нагревался от температуры 60°C до температуры 90°C .



Разбор контрольно-измерительных материалов по математике,
используемых в процедуре ЕГЭ в 2022 году

Задание №2.

В пачке листов бумаги формата А4. За неделю в офисе расходуется 700 листов. Какое наименьшее количество пачек бумаги нужно купить в офис на 8 недель?

Решение.

1) $700 \cdot 8 = 5600$ листов понадобится на 8 недель.

2) $5600 : 250 = 22,4$ пачки бумаги.

3) Т.к. количество пачек - число натуральное, то в этом случае округляем (с избытком): ответ 23 пачки.

Проверка!

Ответ: 23.

Разбор контрольно-измерительных материалов по математике, используемых в процедуре ЕГЭ в 2022 году

Задание №6. Оптовая цена учебника 170 рублей. Розничная цена на 20% выше оптовой. Какое наибольшее число таких учебников можно купить по розничной цене на 7000 рублей?

Решение 1.

$$20\% = 0,2$$

$$1) 170 \cdot 0,2 = 34 \text{ (рубля) – наценка;}$$

$$2) 170 + 34 = 204 \text{ (рубля) – розничная цена;}$$

$$3) 7000 : 204 = 34 \frac{16}{51}$$

Т.к. количество учебников – число натуральное, то округляем (с недостатком): можно купить 34 учебника.

Ответ: 34.

Решение 2.

$$1) 170 \text{ рублей - } 100\%$$

$$x \text{ рублей - } 20\%$$

$$\frac{170}{x} = \frac{100}{20};$$

$$x = \frac{170 \cdot 20}{100}; x = 34 \text{ (рублей) наценка;}$$

$$2) 170 + 34 = 204 \text{ (рубля) – розничная цена;}$$

$$3) 7000 : 204 = 34 \frac{16}{51}$$

Разбор контрольно-измерительных материалов по математике,
используемых в процедуре ЕГЭ в 2022 году

Задание 18. Известно, что Витя выше Коли, Маша выше Ани, а Саша ниже и Коли, и Маши. Выберите утверждения, которые следуют из приведённых данных.

1) Витя выше Саши.

2) Саша ниже Ани.

3) Коля и Маша одного роста.

4) Витя самый высокий из всех.

В ответе укажите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Ответ: 1.

Разбор контрольно-измерительных материалов по математике, используемых в процедуре ЕГЭ в 2022 году

Задание 20: текстовая задача.

Возможные типы задач:

- задача на движение;
- задача на движение по окружности;
- задача на движение по воде;
- задача на совместную работу;
- задача на проценты, сплавы, смеси.

Умения:

- моделировать реальные ситуации на языке алгебры;
- составлять уравнения, неравенства и их системы по условию задачи;
- исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры.

Разбор контрольно-измерительных материалов по математике, используемых в процедуре ЕГЭ в 2022 году

Задание 20. На изготовление 567 деталей первый рабочий тратит на 6 часов меньше, чем второй рабочий на изготовление 648 таких же деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 3 детали больше, чем второй. Сколько деталей в час делает первый рабочий?

Решение.

	Работа, дет.	Производительность, дет./ч	Время, ч
1 рабочий	567	x	$\frac{567}{x}$
2 рабочий	648	$x - 3$	$\frac{648}{x - 3}$

Производительность второго рабочего – положительное число, следовательно, $x > 3$ дет./ч.

$$\frac{648}{x-3} - \frac{567}{x} = 6 \text{ при } x > 3;$$

$$\frac{216}{x-3} - \frac{189}{x} = 2;$$

$$\frac{216x - 189(x-3) - 2x(x-3)}{x(x-3)} = 0;$$

$$2x^2 - 33x - 567 = 0$$

$$D = 33^2 + 8 \cdot 567 = 5625 = 75^2$$

$$x = \frac{33 - 75}{4} = -\frac{42}{4} \text{ – не удовлетворяет условию задачи;}$$

$$x = \frac{33 + 75}{4} = 27.$$

Проверка!

Ответ: 27.

Разбор контрольно-измерительных материалов по математике, используемых в процедуре ЕГЭ в 2022 году

Задание 20. Изюм получается в процессе сушки винограда. Сколько килограммов винограда потребуется для получения 20 килограммов изюма, если виноград содержит 90% воды, а изюм содержит 5% воды?

Решение.

Пусть x кг свежего винограда потребуется, тогда

$$\begin{array}{l} x \text{ кг} - 100\% \\ y \text{ кг} - 10\% (100 - 90) \end{array} \quad \frac{x}{y} = \frac{100}{10};$$

$y = 0,1x$ (кг) – сухое вещество.

Проверка!

$$\begin{array}{l} 0,1x \text{ кг} - 95\% (100 - 5) \\ 20 \text{ кг} - 100\% \end{array} \quad \frac{0,1x}{20} = \frac{95}{100};$$

$$0,1x \cdot 100 = 20 \cdot 95;$$

$$x = 190 \text{ (кг)}$$

Ответ: 190.

Задание №11. В классе 21 учащихся, среди них два друга — Иван и Сергей. Учащихся случайным образом разбивают на 3 равные группы. Найдите вероятность того, что Иван и Сергей окажутся в одной группе.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

m – число исходов, благоприятствующих событию A ;

n – число всех исходов испытания.

Решение.

- 1) $21 : 3 = 7$ человек в одной группе;
- 2) $7 - 1 = 6$ количество свободных мест в группе, где Иван;
- 3) $6 : 20 = 0,3$ вероятность того, друзья окажутся в одной группе.

Ответ: 0,3.

Разбор контрольно-измерительных материалов по математике, используемых в процедуре ЕГЭ в 2022 году

Типы практико-ориентированных задач по геометрии:

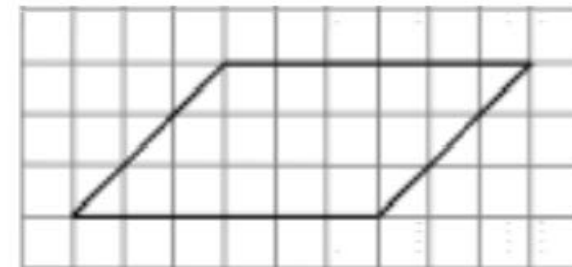
- план местности;
- нахождение площадей;
- нахождение периметров объектов;
- нахождение объемов;
- строительство и ремонт;
- нахождение длины (шнура), высоты (столба).

Умения:

- моделировать реальные ситуации на языке геометрии;
- исследовать построенные модели с использованием геометрических понятий и теорем, аппарата алгебры;
- решать практические задачи, связанные с нахождением геометрических величин.

Разбор контрольно-измерительных материалов по математике, используемых в процедуре ЕГЭ в 2022 году

Задание 5. План местности разбит на клетки. Каждая клетка обозначает квадрат 1 м × 1 м. Найдите площадь участка, изображённого на плане. Ответ дайте в квадратных метрах.

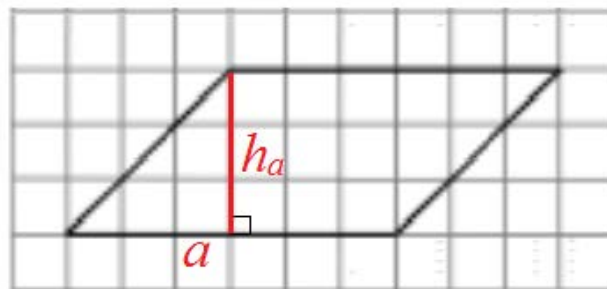


Решение.

$$S = ah_a$$

$$a = 6; h_a = 3;$$

$$S = 18.$$

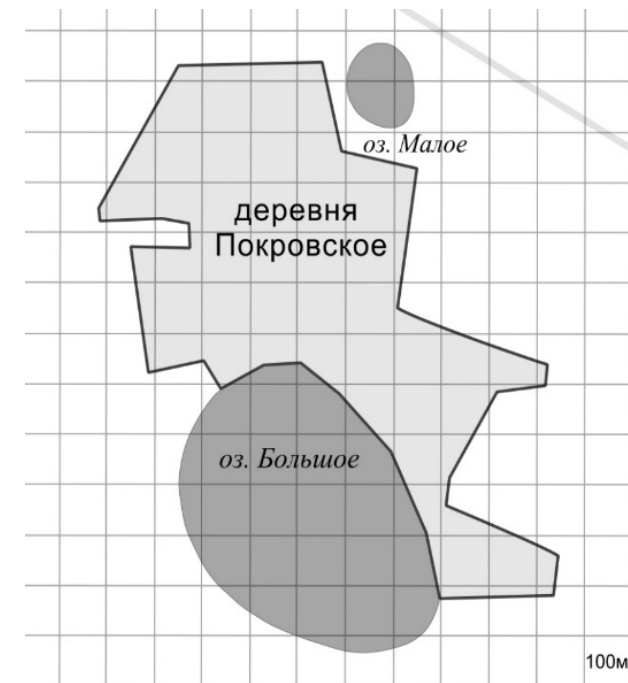


Ответ: 18.

Разбор контрольно-измерительных материалов по математике, используемых в процедуре ЕГЭ в 2022 году

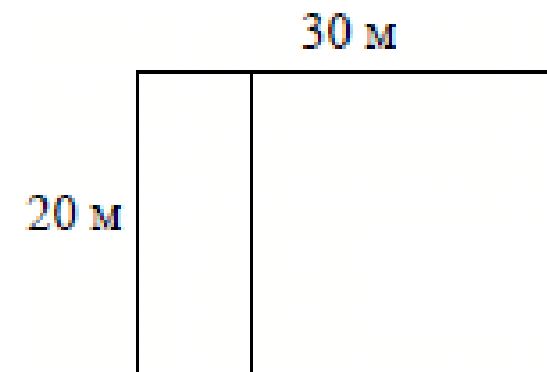
Задание 5. На фрагменте географической карты схематично изображены границы деревни Покровское и очертания озёр Большое и Малое (площадь одной клетки равна одному гектару). Оцените приближённо площадь озера Малого. Ответ дайте в гектарах с округлением до целого значения.

Ответ: 2.



Разбор контрольно-измерительных материалов по математике, используемых в процедуре ЕГЭ в 2022 году

Задание 10. Дачный участок имеет форму прямоугольника со сторонами 20 метров и 30 метров. Хозяин планирует обнести его забором и разделить таким же забором на две части, одна из которых имеет форму квадрата. Найдите общую длину забора в метрах.



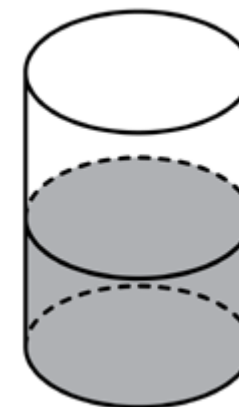
Решение.

$$l = 20 + 30 + 20 + 30 + 20 = 120 \text{ (м)}.$$

Проверка. *Ответ:* 120.

Разбор контрольно-измерительных материалов по математике, используемых в процедуре ЕГЭ в 2022 году

Задание 10. В цилиндрический сосуд налили 2000 см^3 воды. Уровень воды при этом достигает высоты 12 см . В жидкость полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 9 см . Чему равен объем детали? Ответ выразите в см^3 .



Решение.

$$2000 \text{ см}^3 - 12 \text{ см}$$

$$x \text{ см}^3 - 9 \text{ см};$$

$$x = \frac{2000 \cdot 9}{12};$$

$$x = 1500 \text{ см}^3.$$

Проверка.

Ответ: 1500.

Разбор контрольно-измерительных материалов по математике, используемых в процедуре ЕГЭ в 2022 году

Прикладные задачи (вычисление с помощью формул).

ЕГЭ (база) – нахождение неизвестной в уравнении или неравенстве, где зависимость может быть задана любой из элементарных функций, изучаемых в школе;

ЕГЭ (профиль) – нахождение неизвестной в уравнении или неравенстве, где зависимость может быть задана любой из элементарных функций, изучаемых в школе.

Разбор контрольно-измерительных материалов по математике,
используемых в процедуре ЕГЭ в 2022 году

Задача 8. Длину биссектрисы треугольника, проведённой к
стороне a , можно вычислить по формуле $l_a = \frac{2bc \cos \frac{\alpha}{2}}{b+c}$.

Вычислите $\cos \frac{\alpha}{2}$, если $b = 1$, $c = 3$, $l_a = 1,2$.

Решение.

$$l_a = \frac{2bc \cos \frac{\alpha}{2}}{b+c}$$

$$1,2 = \frac{2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot \cos \frac{\alpha}{2}}{1+3};$$

$$2,4 = 3 \cos \frac{\alpha}{2};$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = 0,8.$$

Проверка!

Ответ: 0,8.

Разбор контрольно-измерительных материалов по математике, используемых в процедуре ЕГЭ в 2022 году

№ п/п	№ задания	Тема задания	Максимальный балл
Алгебра и начала анализа			
1	1	Вычисления	1
2	7	Вычисления и преобразования	1
3	9	Решение простейших уравнений	1
4	14	Свойства функций, касательная к графику функции	1
5	17	Решение неравенств, сравнение выражений	1
6	19	Числа и их свойства	1
7	21	Рассуждения	1
Геометрия			
1	15	Задача по планиметрии	1
2	16	Задача по стереометрии	1

Разбор контрольно-измерительных материалов по математике,
используемых в процедуре ЕГЭ в 2022 году

Задание 1.

Найдите значение выражения: $\left(-2\frac{3}{4} - \frac{3}{8}\right) \cdot 160$.

Найдите значение выражения $(728^2 - 26^2) : 754$.

Найдите значения выражения: $0,86 : \frac{43}{20}$.

Найдите значение выражения $(3,9 - 2,4) \cdot 8,2$.

Разбор контрольно-измерительных материалов по математике, используемых в процедуре ЕГЭ в 2022 году

Задание 7.

1. Найдите значение выражения $\frac{(5a^2)^3 \cdot (6b)^2}{(30a^3b)^2}$. *Ответ: 5.*

2. Найдите значение выражения $\frac{\sqrt{2,8} \cdot \sqrt{4,2}}{\sqrt{0,24}}$. *Ответ: 7.*

3. Найдите значение выражения $\frac{\log_3 25}{\log_3 5}$. *Ответ: 2.*

4. Решите уравнение. $\sqrt{12} \cos^2 \frac{5\pi}{12} - \sqrt{3}$. *Ответ: -1,5.*

Разбор контрольно-измерительных материалов по математике,
используемых в процедуре ЕГЭ в 2022 году

Задание 9.

1. Решите уравнение $-\frac{2}{9}x = 1\frac{1}{9}$.

Ответ: -5.

2. Решите уравнение $\sqrt{\frac{3}{2x-27}} = \frac{1}{7}$.

Ответ: 87.

3. Решите уравнение $4^{x-7} = \frac{1}{64}$.

Ответ: 4.

4. Решите уравнение $\log_3(x+2) = 2$.

Ответ: 7.

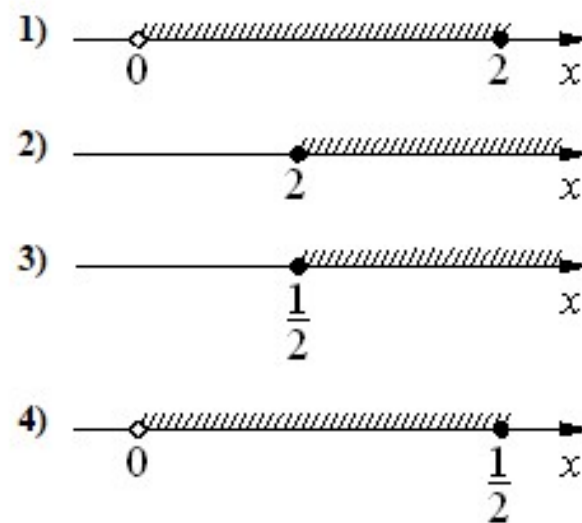
Разбор контрольно-измерительных материалов по математике, используемых в процедуре ЕГЭ в 2022 году

Задание 17. Каждому из четырёх неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

НЕРАВЕНСТВА

- А) $\log_2 x \geq 1$
- Б) $\log_2 x \leq -1$
- В) $\log_2 x \geq -1$
- Г) $\log_2 x \leq 1$

РЕШЕНИЯ



Разбор контрольно-измерительных материалов по математике, используемых в процедуре ЕГЭ в 2022 году

Задание 17. Каждому из четырёх неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

НЕРАВЕНСТВА	РЕШЕНИЯ
А) $2^x \geq 2$	1) $x \geq 1$
Б) $0,5^x \geq 2$	2) $x \leq 1$
В) $0,5^x \leq 2$	3) $x \leq -1$
Г) $2^x \leq 2$	4) $x \geq -1$

Запишите в ответ цифры, расположив их в порядке, соответствующем буквам:

А	Б	В	Г

Разбор контрольно-измерительных материалов по математике,
используемых в процедуре ЕГЭ в 2022 году

Задание 19. Найдите трёхзначное натуральное число, большее 400, которое при делении на 6 и на 5 даёт равные ненулевые остатки и первая слева цифра которого является средним арифметическим двух других цифр. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

Ответ: 453.

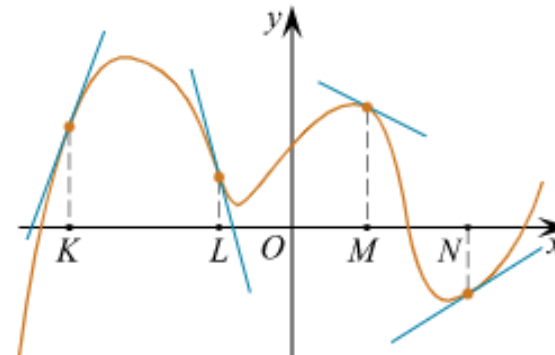
Разбор контрольно-измерительных материалов по математике,
используемых в процедуре ЕГЭ в 2022 году

Задание 21. Саша пригласил Петю в гости, сказав, что живёт в седьмом подъезде в квартире № 462, а этаж сказать забыл. Подойдя к дому, Петя обнаружил, что дом семиэтажный. На каком этаже живёт Саша? (На каждом этаже число квартир одинаково, номера квартир в доме начинаются с единицы.)

Ответ: 5.

Разбор контрольно-измерительных материалов по математике, используемых в процедуре ЕГЭ в 2022 году

Задание 14. На рисунке изображён график функции, к которому проведены касательные в четырёх точках.



Ниже указаны значения производной в данных точках. Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждой точке значение производной в ней.

ТОЧКИ

- А) K
- Б) L
- В) M
- Г) N

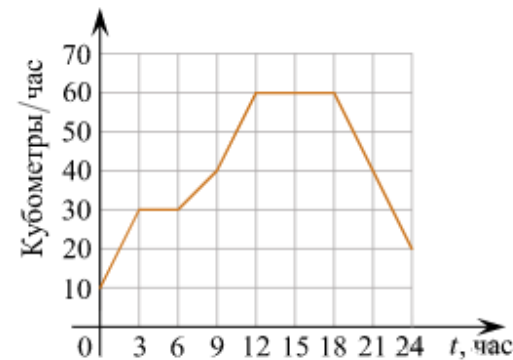
ЗНАЧЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

- 1) -4
- 2) 3
- 3) $\frac{2}{3}$
- 4) $-0,5$

А	Б	В	Г

Разбор контрольно-измерительных материалов по математике, используемых в процедуре ЕГЭ в 2022 году

Задание 14. На диаграмме показан график потребления воды городской ТЭЦ в течение суток.



Пользуясь диаграммой, поставьте в соответствие каждому из указанных промежутков времени характеристику потребления воды данной ТЭЦ.

ПЕРИОД

- А) Ночь (с 0 до 6 часов)
- Б) Утро (с 6 до 12 часов)
- В) День (с 12 до 18 часов)
- Г) Вечер (с 18 до 24 часов)

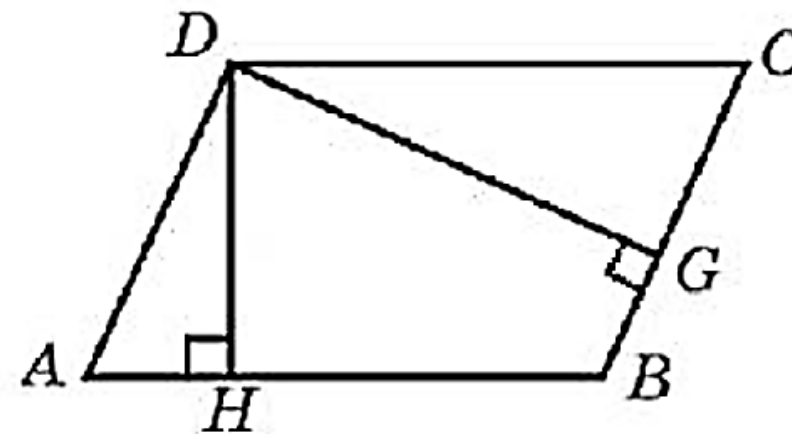
ЗНАЧЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

- 1) Потребление падало
- 2) Потребление не росло
- 3) Рост потребления был наибольшим
- 4) Потребление было наименьшим

А	Б	В	Г

Разбор контрольно-измерительных материалов по математике, используемых в процедуре ЕГЭ в 2022 году

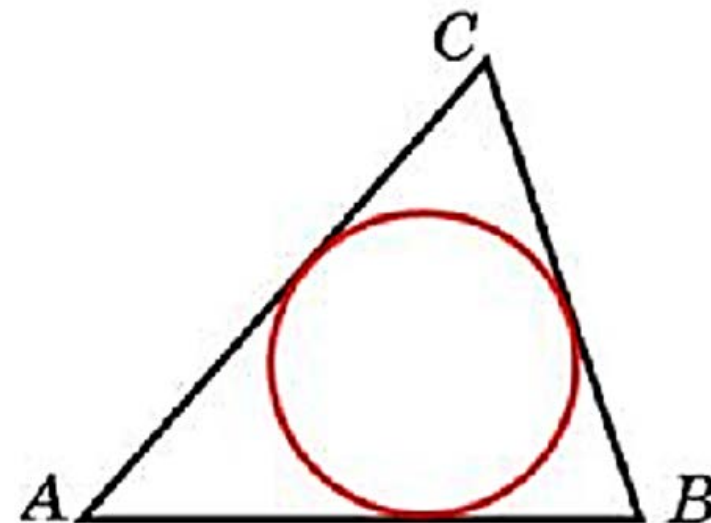
Задание 15. Стороны параллелограмма равны 9 и 15. Высота, опущенная на первую из этих сторон, равна 10. Найдите высоту, опущенную на другую сторону параллелограмма.



Ответ: 6.

Разбор контрольно-измерительных материалов по математике,
используемых в процедуре ЕГЭ в 2022 году

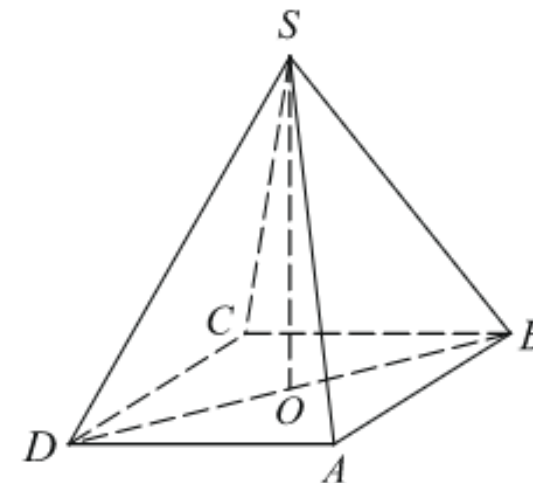
Задание 15. Периметр треугольника равен 12, а радиус вписанной окружности равен 1. Найдите площадь этого треугольника.



Ответ: 6.

Разбор контрольно-измерительных материалов по математике, используемых в процедуре ЕГЭ в 2022 году

Задание 17. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ точка O – центр основания, S – вершина, $SO = 15$, $BD = 16$. Найдите боковое ребро SA .



Решение.

$SA=SB=SC=SD$ по свойству правильной пирамиды; $DO = BD/2$;

□ DSO : $\angle DOS = 90^\circ$, по теореме Пифагора,

$$SD = \sqrt{SO^2 + DO^2} = \sqrt{15^2 + 8^2} = \sqrt{289} = 17.$$

$$SA = 17.$$

Ответ: 17.

Разбор контрольно-измерительных материалов по математике, используемых в процедуре ЕГЭ в 2022 году

Номер задания	Тема задания	Уровень сложности	Максимальный балл
Алгебра			
1	Решение простейших уравнений	Б	1
4	Преобразование выражений	Б	1
9	Работа с функциями	Б	1
12	Решение уравнений	П	2
14	Решение неравенств	П	2
17	Задание с параметром	В	4
18	Задача на числа	В	4
Теория вероятностей и статистика			
2	Нахождение вероятности события	Б	1
10	Нахождение вероятности события	П	1

Разбор контрольно-измерительных материалов по математике, используемых в процедуре ЕГЭ в 2022 году

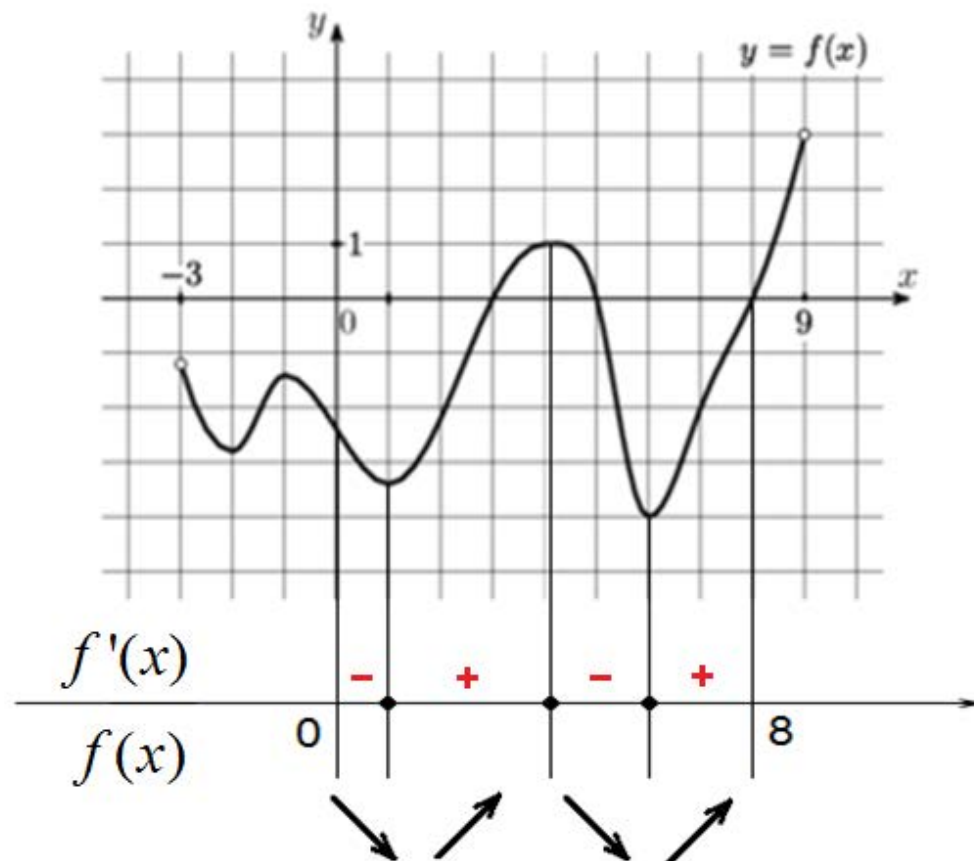
Номер задания	Тема задания	Уровень сложности	Максимальный балл
Геометрия			
3	Задача по планиметрии	Б	1
5	Задача по стереометрии	Б	1
13	Задача по стереометрии	П	3
16	Задача по планиметрии	П	3
Начала анализа			
6	Исследование функций, касательная	Б	1
11	Нахождение большего (наименьшего) значения функции. Точки максимума и минимума.	П	1

Разбор контрольно-измерительных материалов по математике, используемых в процедуре ЕГЭ в 2022 году

Номер задания	Тема задания	Уровень сложности	Максимальный балл
Практико-ориентированные задачи			
7	Расчет по формуле	П	1
8	Текстовая задача	П	1
15	Текстовая задача с экономическим содержанием	П	2

Задание 6.

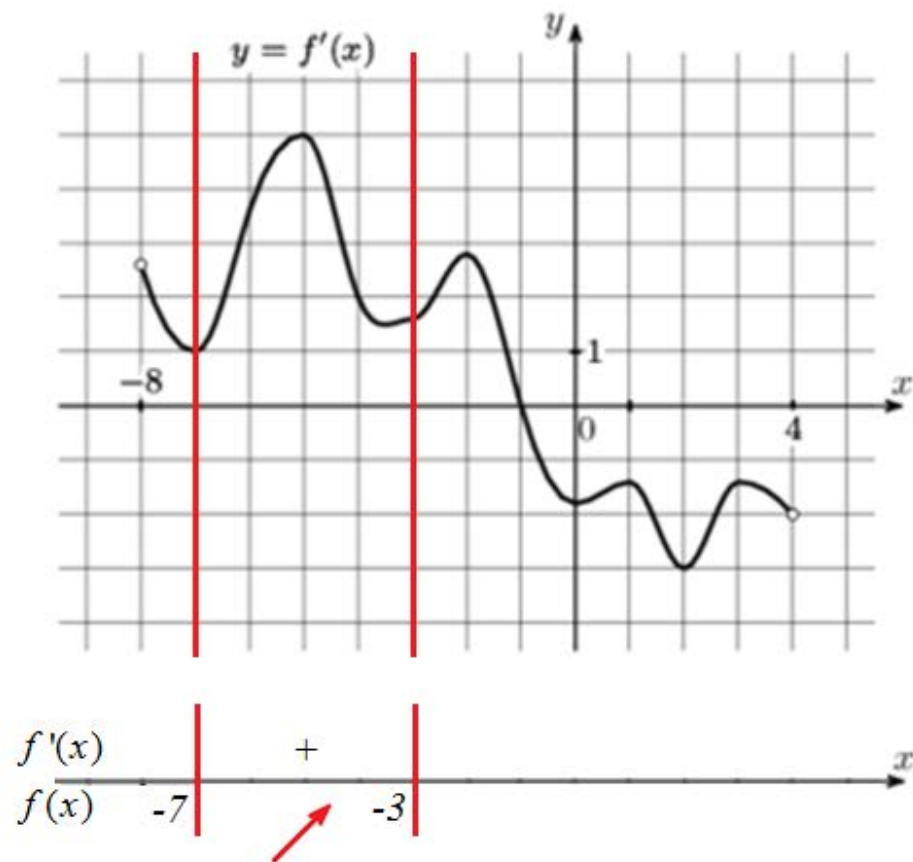
На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-3; 9)$. Найдите количество решений уравнения $f'(x) = 0$ на отрезке $[0; 8]$.



Ответ: 3.

Задание 6.

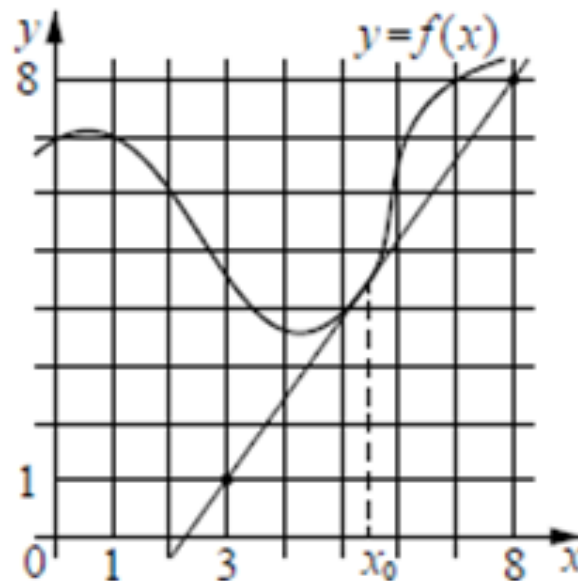
На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-8; 4)$. В какой точке отрезка $[-7; -3]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?



Ответ: -7 .

Задание 6.

На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



Ответ: 1,4.

Задание 11.

Найдите наибольшее значение функции $y = (x - 9)e^{10-x}$ на отрезке $[-11; 11]$.

Решение.

$$D(y) = R;$$

$$y' = e^{10-x} - (x - 9)e^{10-x};$$

$$D(y') = R;$$

$$e^{10-x}(10 - x) = 0;$$

$x = 10$ – критическая точка.

$$x \in [-11; 11]$$

$$y(-11) = -20e^{21} < 0$$

$$y(11) = 2e^{-1} < 1$$

$$y(10) = e^0 = 1.$$

Проверка!

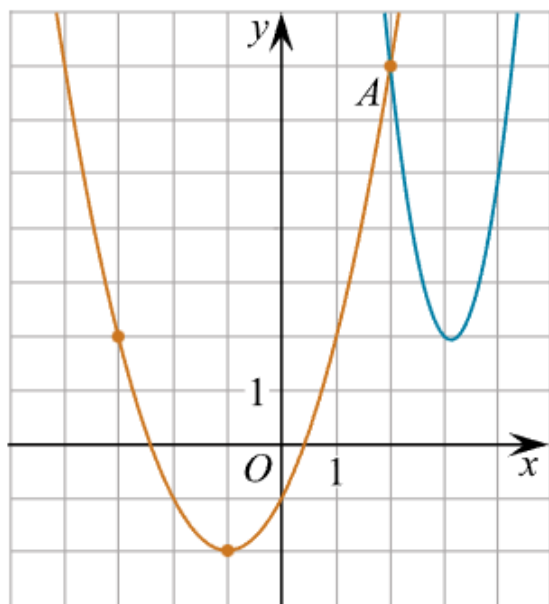
Ответ: 1.

Разбор контрольно-измерительных материалов по математике, используемых в процедуре ЕГЭ в 2022 году

Задание 9. На рисунке изображены графики функций,

$f(x) = 4x^2 - 25x + 41$ и $g(x) = ax^2 + bx + c$, которые пересекаются в точках A и B .

Найдите абсциссу точки B .



Решение 1.

$$g(x) = a(x+m)^2 - n, \text{ где } m=1, n=2;$$

$$g(x) = a(x+1)^2 - 2;$$

$$2 = a(-3+1)^2 - 2; a=1;$$

$$g(x) = x^2 + 2x - 1;$$

Находим точки пересечения:

$$x^2 + 2x - 1 = 4x^2 - 25x + 41;$$

$$x = 7; x = 2.$$

Ответ: 7.

Решение 2.

$$\begin{cases} -1 = \frac{-b}{2a}, \\ 2 = (-3)^2 a - 3b + c, \\ 7 = 2^2 a + 2b + c; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=1, \\ b=2, \\ c=-1. \end{cases} \text{ Получили: } g(x) = x^2 + 2x - 1.$$

Находим точки пересечения:

$$x^2 + 2x - 1 = 4x^2 - 25x + 41;$$

$$x = 7; x = 2.$$

Ответ: 7.

Разбор контрольно-измерительных материалов по математике, используемых в процедуре ЕГЭ в 2022 году

Задание 10. Какова вероятность того, что случайно выбранный телефонный номер оканчивается двумя чётными цифрами?

Решение.

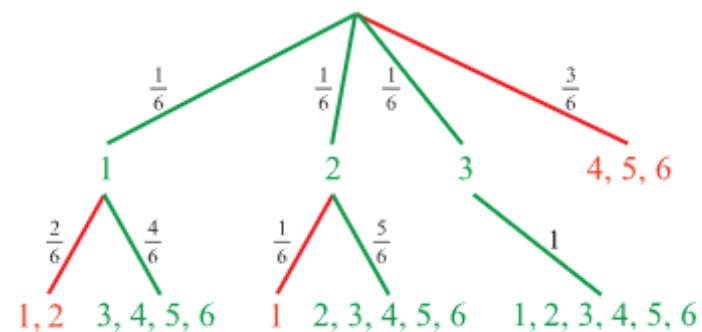
Вероятность того, что на одном из требуемых мест окажется чётное число, равна 0,5.

Следовательно, вероятность того, что на двух местах одновременно окажутся два чётных числа, равна $0,5 \cdot 0,5 = 0,25$.

Ответ: 0,25.

Задание 10. Игральную кость бросали до тех пор, пока сумма всех выпавших очков не превысила число 3. Какова вероятность того, что для этого потребовалось два броска? Ответ округлите до сотых.

Решение.



$$\frac{1}{6} \cdot \frac{4}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \cdot 1 = \frac{5}{12} \approx 0,416 \approx 0,42.$$

Ответ: 0,42.

Задание 12.

а) Решите уравнение $\cos(2\pi - 2x) + \sin^2 x = 0,25$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение.

$$\cos(2\pi - 2x) + \sin^2 x = 0,25;$$

$$\cos 2x + \sin^2 x = 0,25;$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x + \sin^2 x = 0,25;$$

$$\cos^2 x = 0,25;$$

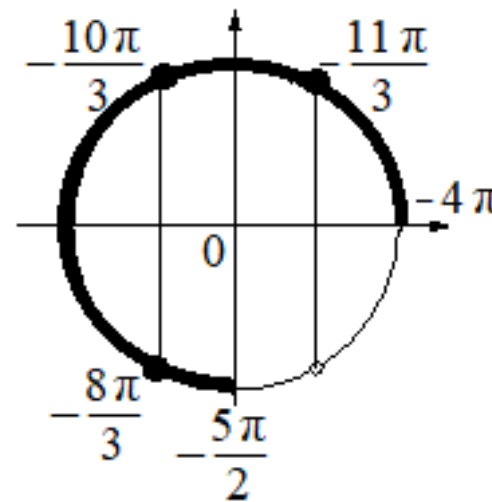
$$(\cos x - 0,5)(\cos x + 0,5) = 0$$

$$\cos x = 0,5 \text{ или } \cos x = -0,5;$$

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z, \text{ или } x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z;$$

Ответ: а) $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z; x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z.$

б) $-\frac{8\pi}{3}; -\frac{10\pi}{3}; -\frac{11\pi}{3}.$



Задание 13.

В основании прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит ромб $ABCD$, причём $AB = BD$. Точки M и N — середины рёбер $B_1 C_1$ и AB соответственно.

а) Докажите, что сечение призмы плоскостью MND_1 — многоугольник с прямым углом при вершине D_1 .

б) Найдите площадь указанного сечения, если $AB = 4$ и $AA_1 = \sqrt{3}$.

Размышления...

Обозначим плоскость MND_1 через α .

1) $D_1 M = \alpha \cap (A_1 D_1 C_1)$;

2) $KN = \alpha \cap (ADC)$;

3) $D_1 M \perp KN$ как прямые пересечения двух параллельных плоскостей третьей;

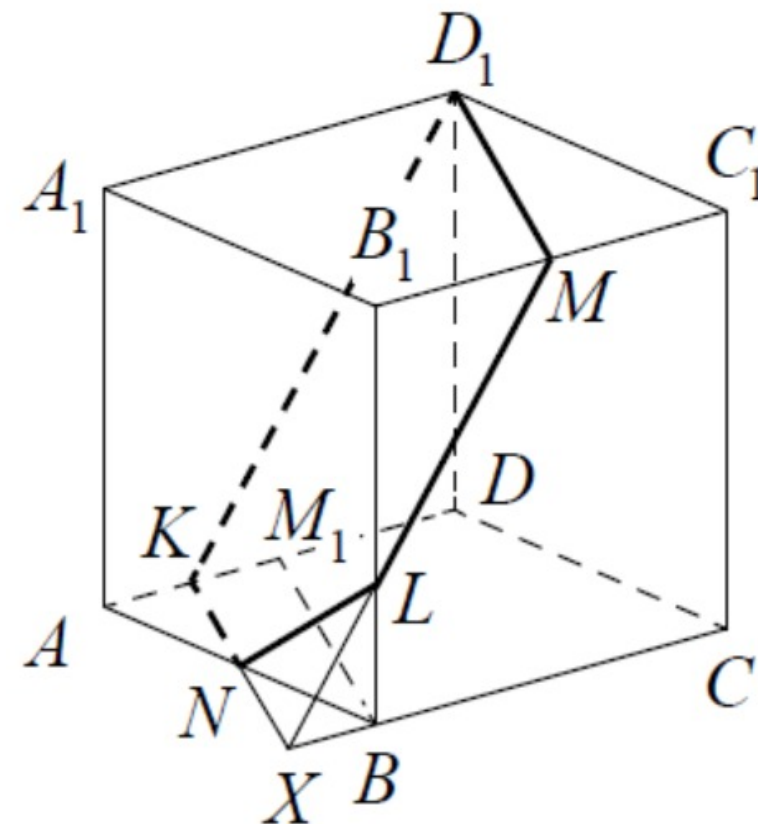
4) $D_1 K = \alpha \cap (A_1 D_1 D)$;

5) $ML = \alpha \cap (BCC_1)$;

6) $ML \perp KD_1$ как прямые пересечения двух параллельных плоскостей третьей;

7) $NL = \alpha \cap (A_1 AB)$;

Сечение $D_1 KNLM$.



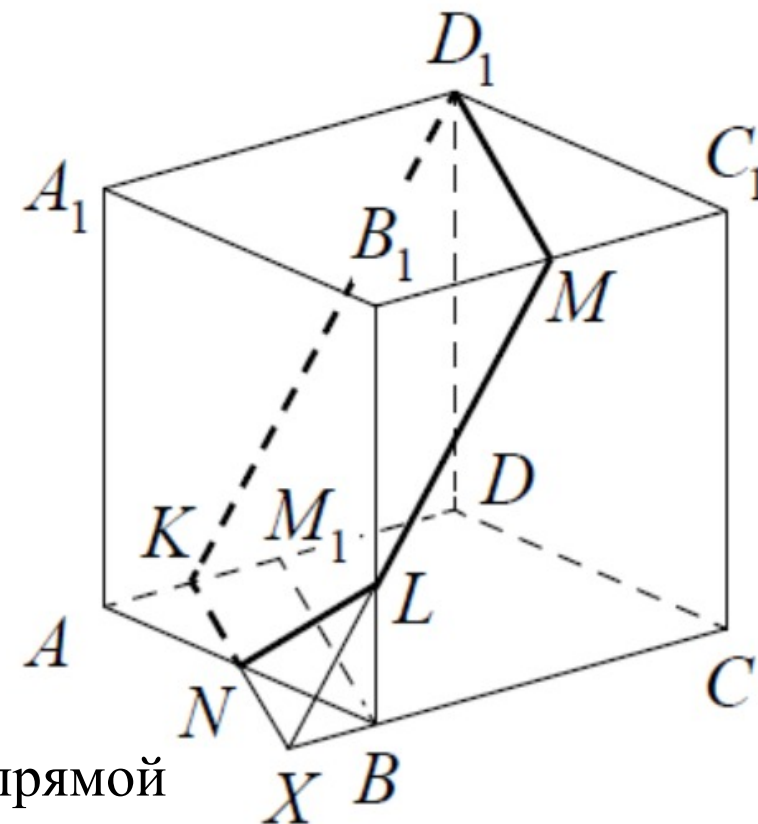
В основании прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит ромб $ABCD$, причём $AB = BD$. Точки M и N — середины рёбер $B_1 C_1$ и AB соответственно.

а) Докажите, что сечение призмы плоскостью MND_1 — многоугольник с прямым углом при вершине D_1 .

б) Найдите площадь указанного сечения, если $AB = 4$ и $AA_1 = \sqrt{3}$.

Пункт а. Решение 1.

- 1) $\square D_1 B_1 C_1 : D_1 B_1 = D_1 C_1$, $D_1 M$ медиана – высота;
- 2) $D_1 M \perp C_1 B_1$;
- 3) $D_1 M \perp C_1 C$, т.к. $C_1 C \perp (D_1 B_1 C_1)$ и $D_1 M \subset (D_1 B_1 C_1)$;
- 4) $D_1 M \perp (BB_1 C_1)$ по признаку перпендикулярности прямой и плоскости;
- 5) $D_1 M \perp ML$ по определению прямой, перпендикулярной плоскости;
- 7) $ML \square D_1 K$ по построению сечения;
- 8) $D_1 M \perp D_1 K$. $\angle K D_1 M = 90^\circ$.



Разбор контрольно-измерительных материалов по математике, используемых в процедуре ЕГЭ в 2022 году

В основании прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит ромб $ABCD$, причём $AB = BD$. Точки M и N — середины рёбер $B_1 C_1$ и AB соответственно.

а) Докажите, что сечение призмы плоскостью MND_1 — многоугольник с прямым углом при вершине D_1 .

б) Найдите площадь указанного сечения, если $AB = 4$ и $AA_1 = \sqrt{3}$.

Пункт б. Решение.

$$S_{KD_1MLN} = S_{KD_1MX} - S_{LXN} = KD_1 \cdot D_1M - \frac{1}{2} XN \cdot XL;$$

KD_1MX — параллелограмм по построению;

Т.к. $\angle KD_1M = 90^\circ$, то KD_1MX — прямоугольник по определению

$$\square D_1KD : \angle D_1DK = 90^\circ, \quad D_1K = \sqrt{D_1D^2 + DK^2} = \sqrt{D_1D^2 + \left(\frac{3}{4}AD\right)^2} = 2\sqrt{3} \quad \text{по теореме Пифагора;}$$

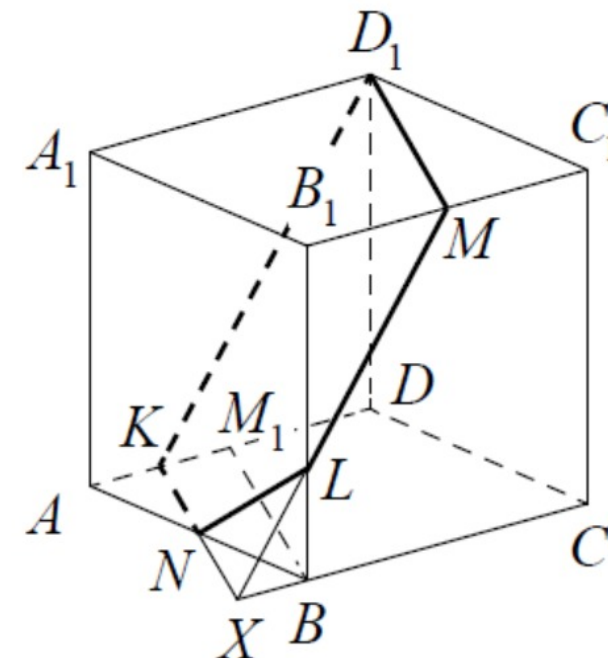
$$\square D_1MC_1 : \angle D_1MC_1 = 90^\circ, \quad D_1M = \sqrt{D_1C_1^2 - C_1M^2} = 2\sqrt{3} \quad \text{по теореме Пифагора;}$$

$$\square NXB = \square NKA \quad \text{по гипотенузе и острому углу;} \quad XN = KN = 0,5 \cdot D_1M = \sqrt{3};$$

$$\square LXB = \square LMB_1 \quad \text{по двум углам;} \quad \frac{XB}{MB_1} = \frac{BL}{B_1L} = \frac{XL}{ML} = \frac{1}{2}; \quad XL = 0,5 \cdot ML = 0,5 \cdot \sqrt{B_1L^2 + B_1M^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3};$$

$$S_{KD_1MLN} = 2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} = 12 - 1 = 11.$$

Ответ: 11.



Разбор контрольно-измерительных материалов по математике, используемых в процедуре ЕГЭ в 2022 году

Задание 14.

Решите неравенство

$$x^2 \log_{243} (4 - x) \leq \log_3 (x^2 - 8x + 16).$$

Решение 1.

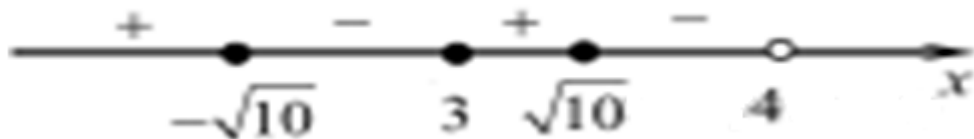
$$\frac{x^2}{5} \log_3 (4 - x) - 2 \log_3 |4 - x| \leq 0 \quad \text{при } 4 - x > 0.$$

$$\log_3 (4 - x) \left(\frac{x^2}{5} - 2 \right) \leq 0;$$

Нули левой части:

$$x = 3; \quad x = -\sqrt{10}; \quad x = \sqrt{10};$$

На ОДЗ, т.е. на луче $x < 4$, применим метод интервалов.



Мысли, рассуждения...

$x^2 - 8x + 16 = (x - 4)^2 = (4 - x)^2$,
что больше 0 при любом x , кроме 4;

$$243 = 3^5;$$

$$\log_{a^k} b^n = \frac{n}{k} \log_a b; \text{ при } a > 0, a \neq 1, b > 0.$$

Получим: $-\sqrt{10} \leq x \leq 3, \quad \sqrt{10} \leq x < 4.$

Ответ: $[-\sqrt{10}; 3] \cup [\sqrt{10}; 4).$

Решите неравенство $x^2 \log_{243}(4-x) \leq \log_3(x^2 - 8x + 16)$.

Решение 2.

$$\frac{x^2}{5} \log_3(4-x) - 2 \log_3|4-x| \leq 0 \quad \text{при } 4-x > 0.$$

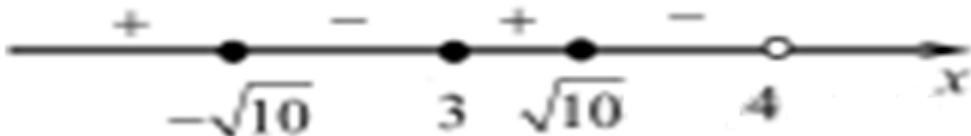
$$\log_3(4-x) \left(\frac{x^2}{5} - 2 \right) \leq 0;$$

$$(3-x)(4-x-1)(x^2-10) \leq 0;$$

$$(3-x)(x-\sqrt{10})(x+\sqrt{10}) \leq 0;$$

Нули левой части: $x = 3$; $x = -\sqrt{10}$; $x = \sqrt{10}$;

На ОДЗ, т.е. на луче $x < 4$, применим метод интервалов.



Мысли, рассуждения...

$x^2 - 8x + 16 = (x-4)^2 = (4-x)^2$,
что больше 0 при любом x , кроме 4;

$$243 = 3^5;$$

$$\log_{a^k} b^n = \frac{n}{k} \log_a b; \text{ при } a > 0, a \neq 1, b > 0.$$

Получим: $-\sqrt{10} \leq x \leq 3, \sqrt{10} \leq x < 4$.

Ответ: $[-\sqrt{10}; 3] \cup [\sqrt{10}; 4)$.

Разбор контрольно-измерительных материалов по математике, используемых в процедуре ЕГЭ в 2022 году

Задание 15.

В июле 2016 года планируется взять кредит в размере 4,2 млн. руб. Условия возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года.
- с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга.
- в июле 2017, 2018 и 2019 годов долг остается равным 4,2 млн. руб.
- суммы выплат 2020 и 2021 годов равны.

Найдите r , если долг выплачен полностью и общие выплаты составили 6,1 млн. рублей.

Решение.

Пусть

$\frac{r}{100}$ процентная

ставка в долях;

$k = 1 + \frac{r}{100}$;

a (руб.) – выплата

в 2020г. и 2021г.

Год	Долг с процентами	Выплата	Остаток долга
2017	$4,2k$	$4,2k-4,2$	4,2
2018	$4,2k$	$4,2k-4,2$	4,2
2019	$4,2k$	$4,2k-4,2$	4,2
2020	$4,2k$	a	$4,2k-a$
2021	$(4,2k-a)k$	a	$(4,2k-a)k-a$
		6,1	0

$$\begin{cases} 3 \cdot 4,2(k-1) + 2a = 6,1, \\ (4,2k - a)k - a = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \frac{4,2k^2}{k+1}, \\ 12,6(k-1) + \frac{8,4k^2}{k+1} - 6,1 = 0. \end{cases}$$

$$12,6(k^2 - 1) + 8,4k^2 - 6,1(k+1) = 0;$$

$$210k^2 - 61k - 187 = 0;$$

$$D = 61^2 + 4 \cdot 210 \cdot 187 = 160801 = 401^2;$$

$$k = \frac{61+401}{420} = 1,1; k = \frac{61-401}{420} < 0;$$

$$1 + \frac{r}{100} = 1,1; r = 10.$$

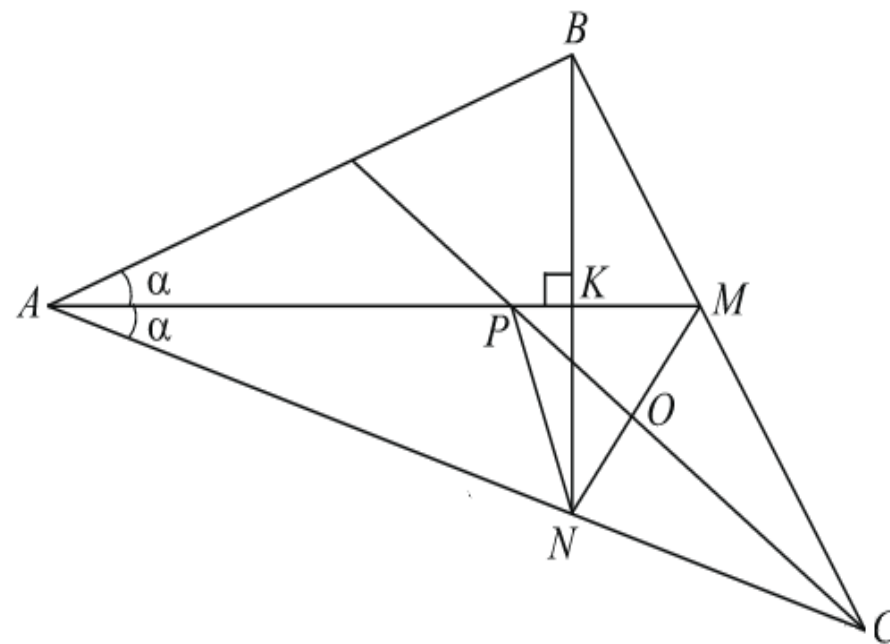
Ответ: 10.

Задание 16.

В треугольнике ABC проведена биссектриса AM . Прямая, проходящая через вершину B перпендикулярно AM , пересекает сторону AC в точке N . $AB = 6$; $BC = 5$; $AC = 9$.

- Докажите, что биссектриса угла C делит отрезок MN пополам;
- Пусть P — точка пересечения биссектрис треугольника ABC . Найдите отношение $AP:PN$.

Размышления...



Разбор контрольно-измерительных материалов по математике, используемых в процедуре ЕГЭ в 2022 году

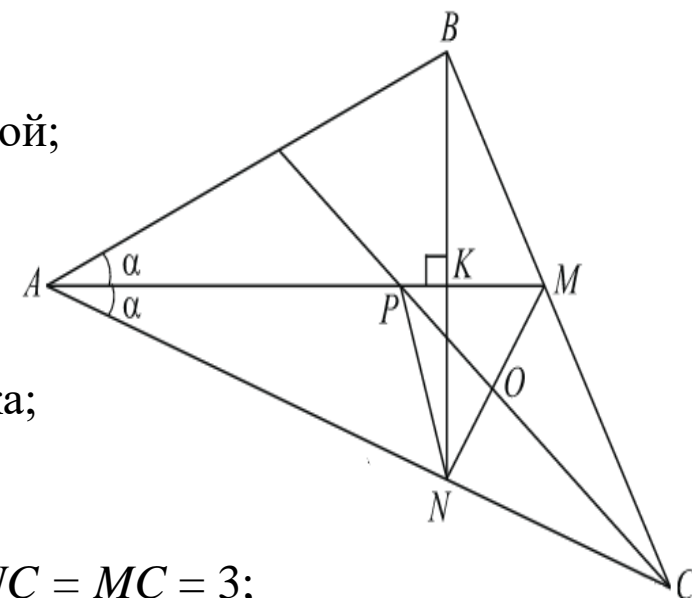
В треугольнике ABC проведена биссектриса AM . Прямая, проходящая через вершину B перпендикулярно AM , пересекает сторону AC в точке N . $AB = 6$; $BC = 5$; $AC = 9$.

- а) Докажите, что биссектриса угла C делит отрезок MN пополам.
 б) Пусть P — точка пересечения биссектрис треугольника ABC . Найдите отношение AP :
 PN .

Решение. (пункт а)

- Пусть $AM \cap BN = K$.
- $\triangle ABN$ равнобедренный, так как в нём биссектриса AK является высотой;
- $BK = KN$, т.к. AK — медиана $\triangle ABN$;
- $AN = AB = 6$, по определению равнобедренного треугольника;
- $NC = AC - AN = 3$;
- $\triangle ABC$: $AB : AC = BM : MC$, по свойству биссектрисы угла треугольника;

$$\frac{BM}{5 - BM} = \frac{6}{9}; 3BM = 10 - 2BM; BM = 2; MC = 3;$$
- $\triangle MNC$ — равнобедренный (по определению) с основанием MN , т. к. $NC = MC = 3$;
- биссектриса CO угла NCM — медиана $\triangle CMN$, по свойству равнобедренного треугольника;
- т.о. биссектриса угла C делит отрезок MN пополам.



Задание 17.

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение
 $a \cdot 4^x + (3a - 2) \cdot 2^x + (a + 1) = 0$ имеет единственный корень.

Размышления.

Пусть $t = 2^x$, тогда получим уравнение $at^2 + (3a - 2)t + (a + 1) = 0$, где $t > 0$.

При $a = 0$ получаем линейное уравнение $-2t + 1 = 0$;

При $a \neq 0$ получаем квадратное уравнение $at^2 + (3a - 2)t + (a + 1) = 0$

Искомое уравнение будет иметь единственный корень, если:

- 1) линейное уравнение имеет положительный корень;
- 2) квадратное уравнение имеет единственный корень, и он положительный;
- 3) квадратное уравнение имеет два корня, но один из них положительный, а другой отрицательный;
- 4) квадратное уравнение имеет два корня, но один из них положительный, а другой 0.

Разбор контрольно-измерительных материалов по математике, используемых в процедуре ЕГЭ в 2022 году

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $a \cdot 4^x + (3a - 2) \cdot 2^x + (a + 1) = 0$ имеет единственный корень.

Решение. Пусть $t = 2^x$, где $t > 0$, тогда искомого уравнение имеет единственный корень при условии, что уравнение $at^2 + (3a - 2)t + (a + 1) = 0$ имеет единственный положительный корень.

При $a = 0$ получим $-2t + 1 = 0$, $t = 0,5 > 0$ – линейное уравнение имеет положительный корень

При $a \neq 0$, $D = (3a - 2)^2 - 4a(a + 1) = 9a^2 - 12a + 4 - 4a^2 - 4a = 5a^2 - 16a + 4$;

$D = 0$ и $t > 0$: квадратное уравнение имеет единственный корень, и он положительный

$$5a^2 - 16a + 4 = 0; \frac{D}{4} = 64 - 20 = 44;$$

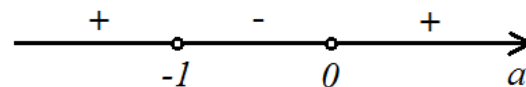
$$a = \frac{8 + 2\sqrt{11}}{5} \text{ или } a = \frac{8 - 2\sqrt{11}}{5};$$

$$\text{при } a = \frac{8 + 2\sqrt{11}}{5} \quad t = \frac{1 - \sqrt{11}}{2} < 0;$$

$$\text{при } a = \frac{8 - 2\sqrt{11}}{5} \quad t = \frac{1 + \sqrt{11}}{2} > 0.$$

$t_1 \cdot t_2 < 0$: квадратное уравнение имеет корни разных знаков

$$\frac{a+1}{a} < 0;$$



$$-1 < a < 0.$$

$t_1 = 0, t_2 > 0$: квадратное уравнение имеет два корня, но один из них положительный, а другой 0.

$$\begin{cases} a + 1 = 0, \\ \frac{-3a + 2}{a} > 0; \end{cases} \begin{cases} a = -1, \\ \frac{-3 \cdot (-1) + 2}{-1} > 0 \text{ неверно} \end{cases}$$

Ответ: $a \in (-1; 0]; \frac{8 - 2\sqrt{11}}{5}$.

Разбор контрольно-измерительных материалов по математике,
используемых в процедуре ЕГЭ в 2022 году

Задание 18.

На доске написано несколько различных натуральных чисел, каждое из которых делится на 3 и оканчивается на 2.

- а) Может ли сумма этих чисел быть равна 216?
- б) Может ли сумма этих чисел быть равна 330?
- в) Какое наибольшее количество чисел может быть на доске, если их сумма равна 1164?

Размышления...

12; 42; 72; 102; 132; 162; 192; 222; ...

Разбор контрольно-измерительных материалов по математике, используемых в процедуре ЕГЭ в 2022 году

На доске написано несколько различных натуральных чисел, каждое из которых делится на 3 и оканчивается на 2.

а) Может ли сумма этих чисел быть равна 216?

Решение.

Да.

Пример: $162 + 42 + 12 = 216$ – верно;

Пример: $12 + 72 + 132 = 216$ – верно.

Ответ: да.

Размышления...

12; 42; 72; 102; 132; 162; 192; 222...

$222 > 216$ – нет;

$216 - 192 = 24$ – нет;

$216 - 162 = 54$; $54 - 42 = 12$; $12 - 12 = 0$.

Разбор контрольно-измерительных материалов по математике, используемых в процедуре ЕГЭ в 2022 году

На доске написано несколько различных натуральных чисел, каждое из которых делится на 3 и оканчивается на 2.

б) Может ли сумма этих чисел быть равна 330?

Решение.

Чтобы в сумме на конце получился 0, количество слагаемых, оканчивающихся на два, должно быть кратно 5. Рассмотрим сумму пяти самых маленьких таких чисел:

$$12 + 42 + 72 + 102 + 132 = 360; 360 > 330;$$

т.к. 360 – это сумма пяти самых маленьких чисел, которые могут быть написаны на доске, то получить сумму меньшую невозможно.

Сумма 330 быть не может.

Размышления...

12; 42; 72; 102; 132; 162; 192; 222;...

Чтобы в сумме на конце получился 0, количество слагаемых, оканчивающихся на два, должно быть кратно 5.

Ответ: нет.

Разбор контрольно-измерительных материалов по математике, используемых в процедуре ЕГЭ в 2022 году

На доске написано несколько различных натуральных чисел, каждое из которых делится на 3 и оканчивается на 2.

в) Какое наибольшее количество чисел может быть на доске, если их сумма равна 1164?

Решение.

если $n = 12$, то

$$S = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n, \text{ где } a_1 = 12, d = 30;$$

значит, $n < 12$; при $n = 7$

$$S = \frac{2 \cdot 12 + 30 \cdot 11}{2} \cdot 7 = (24 + 330) \cdot 6 = 2124 > 1164;$$

пример:

$$12 + 42 + 72 + 102 + 132 + 162 + 642 = 1164.$$

Ответ: 7.

Размышления...

Число слагаемых	$1+5n$	$2+5n$	$3+5n$	$4+5n$	$5n$
Сумма оканчивается на	2	4	6	8	0

Сумма оканчивается на 4 при количестве слагаемых, равном $2; 7; 12; \dots; (2 + 5n)$, где $n = 0; 1; 2; 3 \dots$

Разбор контрольно-измерительных материалов по математике, используемых в процедуре ЕГЭ в 2022 году

На доске написано несколько различных натуральных чисел, каждое из которых делится на 3 и оканчивается на 2.

в) Какое наибольшее количество чисел может быть на доске, если их сумма равна 1164?

Решение. $S = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$, где $a_1 = 12, d = 30$;

если $n = 12$, то

$$S = \frac{2 \cdot 12 + 30 \cdot 11}{2} \cdot 12 = (24 + 330) \cdot 6 = 2124 > 1164;$$

значит, $n < 12$; при $n = 7$

пример:

$$12 + 42 + 72 + 102 + 132 + 162 + 642 = 1164.$$

Размышления...

Каждое число из условия можно представить в виде $5k + 2$;

пусть число слагаемых n ; $n \in N$;

$$1164 = 5m + 2n;$$

$2n$ при делении на 5 дает остаток 4, а

n – остаток 2; значит $n = 5p + 2$, где

$p = 0; 1; 2 \dots$

Ответ: 7.

Разбор контрольно-измерительных материалов по математике, используемых в процедуре ЕГЭ в 2022 году

Умения

- решать уравнения и неравенства;
- выполнять вычисления и преобразования;
- выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами;
- выполнять действия с функциями;
- строить и исследовать простейшие математические модели;
- использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни

**АДРЕС: РОССИЯ, МОСКВА,
УЛ. МАРШАЛА ТУХАЧЕВСКОГО, Д. 43 КОРП. 1**

E-MAIL: MCSKO@MGPU.RU

САЙТ ЦЕНТРА:

