

**Департамент образования и науки города Москвы
Государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования города Москвы
«Московский городской педагогический университет»
Институт цифрового образования**

«УТВЕРЖДАЮ»

Первый проректор

_____ Е.Н. Геворкян

_____ 2025 года

ПРОГРАММА КАНДИДАТСКОГО ЭКЗАМЕНА

по научной специальности

**1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел
и дискретная математика**

и отрасли науки

Физико-математические науки

1. Общие положения.

1.1. Программа кандидатского экзамена по научной специальности 1.1.5. *Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика* и отрасли науки *Физико-математические науки* разработана в соответствии с:

- Федеральным законом от 29 декабря 2012 г. № 273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации»;

- постановлением Правительства Российской Федерации от 30 ноября 2021 г. № 2122 «Об утверждении Положения о подготовке научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре (адъюнктуре)»;

- постановлением Правительства РФ от 24.09.2013 № 842 «О порядке присуждения ученых степеней»;

- приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации от 20 октября 2021 г. № 951 «Об утверждении федеральных государственных требований к структуре программ подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре (адъюнктуре), условиям их реализации, срокам освоения этих программ с учетом различных форм обучения, образовательных технологий и особенностей отдельных категорий аспирантов (адъюнктов);

- приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации от 28 марта 2014 г. № 247 «Об утверждении Порядка прикрепления лиц для сдачи кандидатских экзаменов, сдачи кандидатских экзаменов и их перечня»;

- приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации от 5 августа 2021 г. № 712 «О внесении изменений в некоторые приказы Министерства образования и науки Российской Федерации и Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в сфере высшего образования и науки и признании утратившими силу приказов Министерства образования и науки Российской Федерации от 22 апреля 2013 г. № 296 и от 22 июня 2015 г. № 607»;

- приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации от 24 февраля 2021 г. № 118 «Об утверждении номенклатуры научных специальностей, по которым присуждаются ученые степени, и внесении изменения в Положение о совете по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук, утвержденное приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 10 ноября 2017 г. № 1093»;

- паспортом научной специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика;

- Уставом и локальными нормативными актами Университета.

1.2. Программа кандидатского экзамена регламентирует цель, задачи, содержание, организацию кандидатского экзамена, порядок оценки уровня

знаний соискателя ученой степени кандидата наук, и включает перечень вопросов, выносимых на кандидатский экзамен, рекомендации по подготовке к кандидатскому экзамену, в том числе перечень литературы и ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для подготовки к кандидатскому экзамену.

1.3. Целью проведения кандидатского экзамена по специальной дисциплине по научной специальности 1.1.5. *Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика* является оценка степени подготовленности соискателя ученой степени кандидата наук (аспиранта/прикрепленного лица) к проведению научных исследований по научной специальности 1.1.5. *Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика* и отрасли науки *Физико-математические науки*, по которой подготавливается или подготовлена диссертация.

Соискатель ученой степени кандидата наук должен продемонстрировать:

- ✓ знание основных положений, результатов, методов современной алгебры, математической логики, теории чисел, дискретной математики; основных направлений и проблем современной алгебры, математической логики, теории чисел, дискретной математики.

- ✓ умение решать стандартные задачи, доказывать теоремы алгебры, математической логики, теории чисел, дискретной математики; применять методы генерирования новых идей при решении научно-исследовательских задач;

- ✓ владение навыками использования методов математических рассуждений для решения задач современной алгебры, математической логики, теории чисел, дискретной математики; навыками использования методов доказательств, необходимых для решения научно-исследовательских задач в области современной алгебры.

Сдача кандидатских экзаменов обязательна для присуждения ученой степени кандидата наук.

1.4. Кандидатский экзамен по специальной дисциплине по научной специальности 1.1.5. *Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика* и отрасли науки «Физико-математические науки» проводится в устной или иной форме по билетам (приложение № 1).

Экзаменационный билет включает в себя два теоретических вопроса и вопрос по теме диссертационного исследования.

Университет вправе применять дистанционные образовательные технологии при проведении кандидатского экзамена.

При проведении кандидатского экзамена с применением дистанционных образовательных технологий Университет обеспечивает идентификацию личности на основании представления документа, удостоверяющего личность, путем сверки фотографии в документе с поступающим посредством видеосвязи.

2. Структура и содержание кандидатского экзамена.

Кандидатский экзамен является обязательным и проводится после освоения образовательной программы в полном объеме.

Задачи экзамена:

- определить степень общей готовности аспиранта к профессиональной деятельности;
- установить качество сформированных у аспирантов компетенций по направлениям профессиональной деятельности в сфере научно-исследовательской деятельности;
- определить готовность аспиранта вести поиск решения новых задач.

В программу кандидатского экзамена входят вопросы, связанные с научной специальностью аспиранта: математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика.

Подготовка к кандидатскому экзамену предполагает самостоятельное, глубокое и систематическое изучение аспирантом вопросов, указанных в настоящей программе. Для подготовки к экзамену можно воспользоваться консультацией научного руководителя, источниками, указанными в списке литературы, материалами учебных занятий аспирантуры. Перед экзаменом проводится консультация, на которой также можно задать вопросы по предложенной программе экзамена.

Научный руководитель аспиранта дает рекомендации, направленные на расширение и детализацию знаний, а также изучение зарубежного опыта по проблеме исследования аспиранта. Вопросы, связанные с темой диссертации, вводятся в объем кандидатского экзамена.

Аспирант должен показать знание современных литературных источников и материалов периодической печати по теме вопроса, углубленное знание научных основ математической логики, алгебры, теории чисел и дискретной математики.

Аттестационные испытания проводятся в формате устного экзамена на открытых заседаниях комиссий с участием не менее двух третей ее состава. Аспирант должен ответить на вопрос из указанного списка вопросов и показать, какие теоретические положения положены в основу собственного научного исследования по теме диссертации.

Результаты аттестационных испытаний определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно» согласно критериям оценивания и объявляются в день их проведения после оформления в установленном порядке протоколов заседаний экзаменационной комиссии.

Разделы научной специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика и отрасли науки «Физико-математические науки»

Раздел 1. Математическая логика

Порядковые числа, принцип трансфинитной индукции. Аксиома выбора. Представимость булевых функций формулами логики высказываний. Исчисление высказываний. Полнота и непротиворечивость. Приведение формул логики предикатов к предварённой нормальной форме. Исчисление предикатов. Непротиворечивость. Теорема о дедукции. Теорема Мальцева о компактности. Частично рекурсивные функции. Тезис Чёрча. Рекурсивно перечислимые и рекурсивные множества.

Раздел 2. Алгебра

Теоремы Силова. Простота знакопеременной группы A_n ($n \geq 5$). Простота группы SO_n ($n \geq 5$). Свободные группы и определяющие соотношения. Группы Ли. Разрешимые и нильпотентные группы. Представления групп. Лемма Шура. Квазирегулярный радикал кольца. Нильпотентность радикала артинова кольца. Строение полупростых артиновых колец. Теорема Машке о групповой алгебре. Конечные поля, их группы автоморфизмов. Многочлены деления круга. Теорема о конечных телах. Алгебраические расширения полей. Теорема о примитивном элементе. Основная теорема теории Галуа. Сопряженность и спаривание. Нормальная форма Жордана. Алгебра Клиффорда. Ортогональные и симплектические пространства. Нетеровы кольца и модули. Теорема Гильберта о базисе. Теорема о конечно порожденных модулях над евклидовым кольцом. Одномерные представления группы. Соотношения ортогональности. Теорема Фробениуса. Простые и разрешимые алгебры. Теорема Ли о разрешимых алгебрах. Неприводимые представления простой 3-мерной алгебры. Теорема Пуанкаре-Бирхгофа-Витта (без доказательства). Свободные алгебры. Многообразия алгебр. Теорема Биркгофа о многообразиях. Решетки. Модулярные и дедекиндовы решетки. Теорема Стоуна о булевых алгебрах.

Раздел 3. Теория чисел

Квадратичный закон взаимности. Первообразные корни и индексы. Неравенства Чебышева для функции $\pi(x)$. Дзета-функция Римана. Асимптотический закон распределения простых чисел. Характеры и L-функции. Теорема Дирихле о простых числах в арифметической прогрессии. Тригонометрические суммы. Модуль гауссовой суммы. Полные тригонометрические суммы и число решений сравнений. Гамма- и бета-функции Эйлера.

Раздел 4. Дискретная математика

Циклы, пути. Деревья. Изоморфизм графов. Метрические характеристики графов. Специальные виды графов (эйлеровы, гамильтоновы). Основные комбинаторные соединения. Бином Ньютона. Полиномиальная теорема. Рекуррентные соотношения. Числа Фибоначчи.

3. Примерные вопросы кандидатского экзамена

1. Теоремы Силова.
2. Простота знакопеременной группы A_n ($n \geq 5$).
3. Простота группы SO_n ($n \geq 5$).
4. Свободные группы и определяющие соотношения.
5. Разрешимые и нильпотентные группы.
6. Квазирегулярный радикал кольца.
7. Нильпотентность радикала артинова кольца.
8. Строение полупростых артиновых колец.
9. Теорема Машке о групповой алгебре.
10. Конечные поля, их группы автоморфизмов.
11. Многочлены деления круга. Теорема о конечных телах.
12. Алгебраические расширения полей. Теорема о примитивном элементе.
13. Основная теорема теории Галуа.
14. Сопряженность и спаривание.
15. Нормальная форма Жордана.
16. Алгебра Клиффорда.
17. Ортогональные и симплектические пространства.
18. Нетеровы кольца и модули.
19. Теорема Гильберта о базисе.
20. Теорема о конечно порожденных модулях над евклидовым кольцом
21. Одномерные представления группы.
22. Соотношения ортогональности.
23. Теорема Фробениуса.
24. Простые и разрешимые алгебры.
25. Теорема Ли о разрешимых алгебрах.
26. Неприводимые представления простой 3-мерной алгебры
27. Теорема Пуанкаре-Бирхгофа-Витта (без доказательства).
28. Свободные алгебры. Многообразия алгебр.
29. Теорема Биркгофа о многообразиях
30. Решетки. Модулярные и дедекиндовы решетки.
31. Теорема Стоуна о булевых алгебрах.
32. Порядковые числа, принцип трансфинитной индукции. Аксиома выбора.
33. Представимость булевых функций формулами логики высказываний.

34. Исчисление высказываний. Полнота и непротиворечивость.
35. Приведение формул логики предикатов к предварённой нормальной форме.
36. Исчисление предикатов. Непротиворечивость.
37. Теорема о дедукции.
38. Теорема Мальцева о компактности.
39. Частично рекурсивные функции. Тезис Чёрча.
40. Рекурсивно перечислимые и рекурсивные множества.
41. Квадратичный закон взаимности.
42. Первообразные корни и индексы.
43. Неравенства Чебышева для функции $\pi(x)$.
44. Дзета-функция Римана.
45. Гамма- и бета-функции Эйлера.
46. Асимптотический закон распределения простых чисел.
47. Характеры и L-функции.
48. Теорема Дирихле о простых числах в арифметической прогрессии.
49. Тригонометрические суммы. Модуль гауссовой суммы.
50. Полные тригонометрические суммы и число решений сравнений.
51. Циклы, пути. Деревья. Изоморфизм графов.
52. Метрические характеристики графов.
53. Специальные виды графов (эйлеровы, гамильтоновы).
54. Основные комбинаторные соединения.
55. Бином Ньютона. Полиномиальная теорема.
56. Рекуррентные соотношения. Числа Фибоначчи

4. Порядок и критерии оценки результатов кандидатского экзамена (5-ти балльная система).

Уровень знаний определяется оценками: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно». При оценке знаний учитываются следующие критерии: полнота раскрытия вопросов экзаменационного билета; аргументированность ответа; способность анализировать и сравнивать различные подходы к решению поставленной проблемы; готовность аспиранта отвечать на дополнительные вопросы по существу экзаменационного билета; умение защищать собственные научные идеи; умение разрабатывать предложения и рекомендации; общий уровень культуры общения; навыки и опыт применения знаний в практике; умение подкреплять ответ примерами из практики.

Кандидатский экзамен проводится по билетам. Для подготовки ответа экзаменующийся использует экзаменационные листы.

На каждого экзаменуемого заполняется протокол приема кандидатского экзамена, в который вносятся вопросы билетов и вопросы, заданные членами комиссии.

Уровень знаний оценивается на «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Оценка	Описание критериев оценки
«отлично»	<ul style="list-style-type: none"> – грамотно использована научная терминология; – четко сформулирована проблема, доказательно аргументированы выдвигаемые тезисы; – указаны основные точки зрения, принятые в научной литературе по рассматриваемому вопросу; – аргументирована собственная позиция или точка зрения, обозначены наиболее значимые в данной области научно-исследовательские проблемы; – продемонстрировано умение проводить междисциплинарные связи, связывая теоретические положения сообщения с профессиональной деятельностью.
«хорошо»	<ul style="list-style-type: none"> – применяется научная терминология, но при этом допущена ошибка или неточность в определениях, понятиях; – проблема сформулирована, в целом доказательно аргументированы выдвигаемые тезисы; – имеются недостатки в аргументации, допущены фактические или терминологические неточности, которые не носят существенного характера; – высказано представление о возможных научно-исследовательских проблемах в данной области; – аргументирована собственная позиция или точка зрения, обозначены наиболее значимые в данной области научно-исследовательские проблемы.
«удовлетворительно»	<ul style="list-style-type: none"> – названы и определены лишь некоторые основания, признаки, характеристики рассматриваемой проблемы; – допущены существенные терминологические неточности; – имеются существенные недостатки в аргументации, допущены фактические или терминологические неточности; – не высказано представление о возможных

	научно-исследовательских проблемах в данной области; – частично аргументирована собственная позиция или точка зрения, обозначены наиболее значимые в данной области научно-исследовательские проблемы.
«неудовлетворительно»	– отмечается отсутствие знания терминологии, научных оснований, признаков, характеристик рассматриваемой проблемы; – не представлена собственная точка зрения по данному вопросу.

5. Перечень рекомендуемой литературы и ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»

а) основная литература:

1. Бухштаб А.А. Теория чисел : учебное пособие / А. А. Бухштаб. - Изд. 3-е, стер. - Санкт-Петербург [и др.] : Лань, 2008. - 383, [1] с. : ил., табл.; 21 см.
2. Ван дер Варден Б.Л. Алгебра / Пер. с нем. А. А. Бельского ; Под ред. Ю. И. Мерзлякова. - Москва : Наука, 1976. - 648 с.; 23 см.
3. Основы теории чисел : учебное пособие / И. М. Виноградов. - Изд. 12-е, стер. - Санкт-Петербург [и др.] : Лань, 2009 (Архангельск : ИПП Правда Севера). - 176 с. : табл.; 21 см. - (Классическая учебная литература по математике).; ISBN 978-5-8114-0535-04.
4. Математическая логика и теория алгоритмов : учебное пособие для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности 050201 «Математика» / В. И. Игошин. - 2-е изд., стер. - Москва : Академия, 2008. - 446, [1] с. : ил., портр.; 22 см. - (Высшее профессиональное образование. Педагогические специальности).; ISBN 978-5-7695-4593-1
5. Основы теории групп / М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков. - 3-е изд., перераб. и доп. - Москва : Наука, 1982. - 288 с.; 21 см.
6. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Часть 3. Основные структуры алгебры. – Москва : МЦНМО, 2024. – 272 с.
7. Лекции по общей алгебре : учебник / А. Г. Курош. - Изд. 2-е, стер. - Санкт-Петербург [и др.] : Лань, 2007. - 555 с.; 21 см. - (Лучшие классические учебники. Математика).; ISBN 978-5-8114-0617-3
8. Ленг, Серж. Алгебра [Текст] / Пер. с англ. Е. С. Голода ; Под ред. А. И. Кострикина. - Москва : Мир, 1968. - 564 с.; 22 см.
9. Нестеренко Ю.В. Теория чисел : учебник для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности "Математика" / Ю. В. Нестеренко. - Москва : Академия, 2008. - 264, [1] с.; 22 см. - (Высшее профессиональное образование. Физико-математические науки).; ISBN 978-5-7695-4646-4

10. Скорняков Л.А., Элементы общей алгебры / Л. А. Скорняков. - Москва : Наука, 1983. - 272 с. : ил.; 21 см.

б) дополнительная литература:

1. Курош А.Г. Теория групп : учебник / А. Г. Курош. - Изд.четвертое, стер. - СПб. [и др.] : Лань, 2005 (ГУП ИПК Ульян. Дом печати). - 648 с.; 24 см

2. Лихтарников Л.М., Сухачева Т.Г. Математическая логика : курс лекций, задачник-практикум и решения : учебное пособие / Л. М. Лихтарников, Т. Г. Сухачева. - Изд. 3-е, испр. - Санкт-Петербург [и др.] : Лань, 2008. - 276 с. : ил., табл.; 21 см.; ISBN 978-5-8114-0082-9

3. Монахов В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов. Учебное пособие для студентов физико-математических специальностей учреждений, обеспечивающих получение высшего образования / В. С. Монахов. - Минск : Вышэйшая школа, 2006. - 206, [1] с.; ISBN 985-06-1114-6

4. Туганбаев, А. А. Алгебры кватернионов и моноидные кольца : монография / А. А. Туганбаев. - 3-е изд. , стер. - Москва : ФЛИНТА, 2025. - 113 с. - ISBN 978-5-9765-1504-8. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.ru/catalog/product/2223263> (дата обращения: 22.10.2025). – Режим доступа: по подписке.

в) ресурсы информационно-телекоммуникационной сети Интернет

1. <https://www.mathnet.ru/> - Общероссийский математический портал
2. <http://www.elibrary.ru> – Научная электронная библиотека
3. <https://eqworld.ipmnet.ru/indexr.htm> – Международный научно-образовательный сайт EqWorld
4. http://www.nsc.ru/win/mathpub/math_www.html – Математика на страницах WWW

**Образец экзаменационного билета для проведения
кандидатского экзамена**

Департамент образования и науки города Москвы
Государственное автономное образовательное учреждение
города Москвы
«Московский городской педагогический университет»
Институт цифрового образования
Департамент математики и физики

Кандидатский экзамен

Научная специальность

1.1.5. Математическая логика, алгебра,
теория чисел и дискретная математика

Отрасль науки

Физико-математические науки

Экзаменационный билет № 1

1. Теоремы Силова.
2. Теорема Биркгофа о многообразиях.
3. Вопрос по теме диссертационного исследования.

Начальник департамента

подпись

М.Ю. Королев