ДЕПАРТАМЕНТ ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ ГОРОДА МОСКВЫ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ ГОРОДА МОСКВЫ «МОСКОВСКИЙ ГОРОДСКОЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Институт цифрового образования

ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ИСПЫТАНИЙ В АСПИРАНТУРУ

по научной специальности
1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

Москва 2026

Программа составлена в соответствии с Федеральными государственными требованиями к структуре программ подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре (адъюнктуре), условиям их реализации, срокам освоения этих программ с учетом различных форм обучения, образовательных технологий и особенностей отдельных категорий аспирантов, утвержденными приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации от 30 октября 2021 г. № 951.

Составитель:

Шилин Илья Анатольевич, доцент департамента математики и физики ИЦО ГАОУ ВО МГПУ, кандидат физико-математических наук, доцент

_________________/И.А. Шилин/

Рассмотрена на заседании департамента математики и физики. Протокол № 7 от «25» марта 2026 г.

Начальник департамента математики и физики, доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, доцент

________________ / М.Ю. Королев/

Утверждена Ученым советом Института цифрового образования ГАОУ ВО МГПУ. Протокол № 10 от «29» апреля 2026 г.

Председатель Ученого совета ИЦО ГАОУ ВО МГПУ

_______________________/ В.И. Абрамов

1. Пояснительная записка

Настоящая программа составлена на основе требований к обязательному минимуму содержания и уровню подготовки выпускника магистратуры по направлению «Педагогическое образование», определяемых Федеральным государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования по направлению «Педагогическое образование».

Прием в ГАОУ ВО МГПУ для освоения программы аспирантуры по специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (отрасли науки – физико-математические) осуществляется на конкурсной основе по результатам устного экзамена.

Вступительный экзамен в аспирантуру по направлению подготовки 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика является одной из традиционных форм аттестации уровня научно-исследовательской подготовки, поступающих в аспирантуру. К вступительным испытаниям допускаются лица, имеющие образование не ниже высшего образования (специалитет или магистратура).

Целью проведения вступительного экзамена в аспирантуру является определение фундаментальных математических знаний, навыков профессионального мышления, способности к самостоятельному мышлению, умения применять практические знания для решения практических задач. Структурно содержание экзамена представлено пятью разделами: математическая логика, алгебра и теория чисел, математический анализ, геометрия и дискретная математика. Результаты вступительных испытаний оцениваются по 100-балльной шкале.

Вступительные испытания проводятся очно и (или) с использованием дистанционных технологий.

Вступительные испытания проводятся в устной форме.

Программа обобщает многолетний опыт проведения вступительных испытаний в аспирантуру как в МГПУ, так и в другие педагогические вузы по специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (01.01.06 Математическая логика, алгебра и теория чисел до 24.02.2021 г.).

Требования к поступающим в аспирантуру по указанной научной специальности:

- Уверенное знание основ фундаментальных дисциплин и достаточный кругозор для научной работы.
- Наличие навыков самостоятельной научной работы (опыт участия в научных исследованиях, написания статей, выступления на конференциях).
- Высокая мотивация к обучению в аспирантуре.

Вступительное испытание в форме экзамена по специальности включает в себя два вопроса, отражающие знания основ фундаментальных дисциплин в области математической логики, алгебры и теории чисел.

2. Содержание по вступительному экзамену по математике в аспирантуру по научной специальности 1.1.5 Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

Раздел 1. Математическая логика

Алгебра высказываний. Полные системы связок алгебры высказываний.

Булевы функции. Представление булевой функции формулой алгебры высказываний. Полная система булевых функций.

Предикаты. Операции над предикатами. Кванторы общности и существования. Логическое следствие.

Понятие формальной теории. Теорема дедукции. Теорема о полноте в теории. Непротиворечивость теории. Независимость системы аксиом теории.

Формальная арифметика. Теорема Геделя о неполноте (без доказательства).

Раздел 2. Алгебра и теория чисел

Бинарные отношения на множестве. Рефлексивные, симметричные, антисимметричные, транзитивные отношения. Отношения частичного порядка и эквивалентности. Разбиение множества на классы.

Отображения между множествами, их виды. Операции и их виды. Порядок и мощность множества. Счетные и континуальные множества. Терема Кантора-Бернштейна. Несчетность континуального множества. Булеан конечного множества. Теорема о мощности булеана.

Матрицы и операции над ними. След, определитель и ранг матрицы. Способы решения систем линейных алгебраических уравнений.

Группы. Подгруппы. Смежные классы группы по подгруппе. Теорема Лагранжа. Нормальные делители групп. Факторгруппы. Гомоморфизмы групп и их виды. Теоремы об образе и ядре гомоморфизма групп. Циклические группы. Функция Эйлера. Мультипликативные арифметические функции.

Кольца, подкольца, идеалы. Группа обратимых элементов ассоциативного кольца с единицей. Факторкольца. Кольцо вычетов и его обратимые элементы. Поле вычетов. Первообразные корни по простому модулю.

Решение линейных сравнений с помощью функции Эйлера и цепных дробей. Решений сравнений по простому модулю с помощью индексирования. Квадратичные (не)вычеты и символ Лежандра.

Кольца многочленов. Теорема о делении с остатком в кольце многочленов над полем. Теорема Безу. Теорема Гаусса («основная теорема алгебры»). Теорема Виета. Формулы Кардано. Метод Феррари. Структура множества корней многочлена степени 3 с действительными коэффициентами.

Обратимые элементы колец многочленов. Теорема о простых элементах колец многочленов. Классификация элементов целостного кольца с единицей. Простые и составные элементы колец **C**[x] и **R**[x].

Примитивные многочлены. Теорема о том, что составной многочлен с целыми коэффициентами в кольце **Q**[x] является составным и в кольце **Z**[x]. Признак Эйзенштейна. Простые и составные элементы кольца **Q**[x].

Линейные пространства, подпространства и оболочки. Линейные многообразия. Линейно (не)зависимые системы векторов. Базисы линейного пространства. Размерность линейного пространства. Пересечение и сумма линейных подпространств. Прямые суммы. Формула Грассмана. Гомоморфизмы линейных пространств.

Предгильбертовы пространства. Неравенство Коши-Буняковского. Длина вектора. Угол между ненулевыми векторами. Ортогональные системы векторов. Ортогональное дополнение линейного подпространства. Ортогональные системы векторов. Процесс ортогонализации.

Линейные операторы линейного пространства: их матричное представление, образ и ядро, ранг и дефект. Собственные значения и векторы линейного оператора, их вычисление. Диагонализация матрицы линейного оператора. Алгебры. Алгебра линейных операторов.

Раздел 3. Математический анализ

Предел числовой последовательности. Сходящийся и расходящийся числовые ряды. Достаточное условие расходимости ряда.

Предел функции в точке расширенной числовой прямой. Непрерывность функции в точке. Точки разрыва и их классификация.

Функции двух переменных, их линии уровня, частные производные и дифференцируемость в точке. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Отыскание точек экстремума функции и точек условного экстремума функции двух переменных.

Комплексные числа. Необходимое условие Коши-Римана дифференцируемости функции комплексного переменного. Функция, аналитическая в точке и области. Изолированные особые точки и их классификация.

Интеграл непрерывной функции по отрезку. Двойной интеграл непрерывной функции по компакту. Геометрический смысл интеграла.

Дифференциал функции одного и двух переменных. Уравнения в полных дифференциалах. Однородные уравнения первого порядка. Линейные уравнения первого порядка. Уравнения Бернулли.

Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.

Раздел 4. Геометрия

Векторное произведение векторов. Уравнение прямой и плоскости в пространстве. Смешанное произведение. Расстояние от точки до плоскости. Расстояние между скрещивающимися прямыми. Кривые и поверхности второго порядка.

Группа движений. Группа движений первого рода.

Раздел 5. Дискретная математика

Метрические характеристики графов. Специальные виды графов (эйлеровы, гамильтоновы).

Основные комбинаторные соединения. Бином Ньютона. Полиноминальная теорема. Рекуррентные соотношения.

3. Список вопросов к вступительному экзамену по математике в аспирантуру по научной специальности 1.1.5 Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

1. Алгебра высказываний. Полные системы связок алгебры высказываний.
2. Булевы функции. Представление булевой функции формулой алгебры высказываний. Полная система булевых функций.
3. Предикаты. Операции над предикатами. Кванторы общности и существования. Логическое следствие.
4. Понятие формальной теории. Теорема дедукции. Теорема о полноте в теории. Непротиворечивость теории. Независимость системы аксиом теории.
5. Формальная арифметика. Теорема Геделя о неполноте (без доказательства).
6. Основные теоремы о системах линейных уравнений.
7. Базис и размерность векторного пространства.
8. Циклические группы, их подгруппы и гомоморфные образы.
9. Группа подстановок и ее подгруппы.
10. Собственные векторы и собственные значения.
11. Разложение многочленов в произведение неприводимых нормированных множителей над полями **C** и **R**.
12. Теорема о строении простого алгебраического расширения.
13. Арифметические функции: число делителей $\tau(n)$, сумма делителей $\sigma(n)$, функция Эйлера $\varphi(n)$.
14. Алгоритм Евклида и его применения (НОД, НОК целых чисел и многочленов над полем). Линейное представление НОД.

15. Сравнения и их свойства. Кольцо классов вычетов по модулю m. Теоремы Эйлера и Ферма.

16. Бесконечно малые и бесконечно большие функции: определение и свойства. Предел функции одной переменной на бесконечности и в точке: различные определения, геометрический смысл, свойства.

17. Дифференцируемость, производная, дифференциал функции одной переменной. Геометрический и физический смысл производной. Связь между непрерывностью и дифференцируемостью.

18. Первообразная, неопределенный и определенный интегралы. Интегрируемость непрерывных функций. Формула Ньютона-Лейбница.

19. Основные понятия, связанные с числовыми рядами. Признаки сходимости числовых рядов.

20. Дифференцируемость, частные производные функций нескольких переменных. Экстремум функции двух переменных.

21. Векторы на плоскости и в пространстве. Линейные операции над векторами, координаты векторов. Скалярное, векторное и смешанное произведение векторов. Применение свойств векторов к решению задач элементарной геометрии.

22. Подобия плоскости и их свойства. Классификация подобий. Группа подобий и ее подгруппы. Применение подобий к решению задач элементарной геометрии.

23. Проблема пятого постулата. Теоремы Лежандра. Связь аксиомы параллельности с суммой углов треугольника.

24. Двойное отношение точек и прямых на проективной плоскости. Гармонические свойства полного четырехвершинника. Приложения гармонических свойств полного четырехвершинника к задачам элементарной геометрии. Проективные преобразования и их свойства. Проективно-эквивалентные фигуры.

25. Аксиоматика Гильберта 3-мерного евклидова пространства.
26. Метрические характеристики графов.
27. Специальные виды графов (Эйлеровы, Гамильтоновы).
28. Основные комбинаторные соединения.
29. Бином Ньютона. Полиноминальная теорема.
30. Рекуррентные соотношения.

3. Критерии оценки ответов поступающих на вступительном испытании в аспирантуру по специальности 1.1.5 Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

81 – 100 баллов:

– все вопросы билета раскрыты полностью;

– студент владеет основными теориями и глубоко понимает их содержание;

– имеет ясное представление связи теории и практики в рамках излагаемого материала;

– уверенно владеет необходимыми методами решения конкретных задач, может проиллюстрировать основные положения теории конкретными примерами;

– ясно и четко дает основные определения. Владеет терминологическим и понятийным аппаратом;

– развернуто отвечает на дополнительные вопросы.

66 – 80 баллов:

– вопросы билета раскрыты по существу;

– поступающий в целом владеет основными теориями и понимает их содержание;

– имеет общее представление о связи теории и практики в рамках излагаемого материала;

– владеет в целом необходимыми методами решения конкретных задач, может проиллюстрировать основные положения теории конкретными примерами;

– в достаточной мере владеет понятийным и терминологическим аппаратом;

– имеет затруднения при ответе на дополнительные вопросы.

51 – 65 баллов:

– вопросы билета раскрыты, но не полностью;

– фрагментарное понимание основных теорий;

– слабое понимание связи теории и практики;

– поступающий может проиллюстрировать основные положения теории конкретными примерами, но имеет затруднения при решении некоторых задач;

– поступающий не демонстрирует уверенного владения понятийным и терминологическим аппаратом;

– дополнительные вопросы вызывают затруднение.

0 – 50 баллов :

– большая часть вопросов не раскрыта;

– поступающий не может проиллюстрировать основные положения теории конкретными примерами, не может применить теорию при решении конкретных задач;

– нет ответов на дополнительные вопросы.

4. Список рекомендуемой литературы

1. Кострикин А. И. Введение в алгебру: В 3-х ч. Ч. I-II / А. И. Кострикин. – М.: МЦНМО, 2020. – 271 с.
2. Куликов Л. Я. Алгебра и теория чисел / Л. Я. Куликов. – М.: Высшая школа, 1979 – 559 с.
3. Винберг Э.Б. Курс алгебры. М.: МЦНМО, 2013 г. – 590 с.
4. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре: учебное пособие / Д.К. Фаддеев – СПб.: Лань, 2020. – 416 с.
5. Мендельсон Э. Введение в математическую логику / Э. Мендельсон – М.: Наука, 1971. – 320 с.
6. Игошин В.И. Математическая логика и теория алгоритмов / В. И. Игошин. – М.: Академия, 2008. – 448 с.
7. Нестеренко Ю.В. Теория чисел / Ю.В. Нестеренко – М.: Академия, 2008. – 265 с.
8. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3-х т. / Г.М. Фихтенгольц. – СПб.: Лань, 2009-2017.
9. Шипачев В.С. Высшая математика / В.С. Шипачев – М.: Высшая школа, 1998. – 479 с.
10. Мордкович А.Г., Солодовников А.С. Математический анализ / А.Г. Мордкович, А.С. Солодовников. – М.: Высшая школа, 1990. – 419 с.
11. Атанасян Л.С., Базылев В.Т. Геометрия: В 2-х ч. / Л.С. Атанасян, В.Т. Базылев. – М.: Просвещение, 1986-1987.
12. Погорелов А.В. Геометрия / А.В. Погорелов. – М.: Наука, 1983. – 288 с.
13. Деза Е.И., Модель Д.Л. Основы дискретной математики: учеб. пособие для студентов высш. учеб. заведений / Е. И. Деза, Д. Л. Модель. – М.: URSS, 2011. – 218 с.
14. Андерсон Д.А. Дискретная математика и комбинаторика / Джеймс А. Андерсон. – М.; СПб; Киев; Вильямс, 2004. – 957 с.
15. Романовский И.В. Дискретный анализ: учеб. пособие по приклад. математике и информатике / И. В. Романовский. – М.: Физматлит; СПб.: Невский Диалект : Лаб. Базовых Знаний, 2001. – 237 с.